NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. HENRI LEBESGUE

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

14, RUE DES ARTS, 14

—

1922

FONCTIONS ET TITRES

Élève de l'École Normale Supérieure	1894-1897
Agrégé des Sciences mathématiques	1897
Professeur de la classe de Centrale au Lycée de Nancy	1899-1902
Docteur ès sciences	1902
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes	1902-1906
Chargé du cours Peccot au Collège de France	1902-03 et 1904-05
Chargé de cours, puis Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers	1906-1910
Maître de Conférences d'Analyse mathématique à la Faculté des Sciences de Paris	1910-1919
Professeur d'application de l'Analyse à la Géométrie à la Faculté des Sciences de Paris	1920-1921
Professeur de mathématiques au Collège de France	1921

Membre honoraire de la Cambridge philosophical Society	Mai 1914
Membre étranger de l'Académie royale des Sciences et des Lettres du Danemark	Avril 1920

Lauréat de l'Institut :

Prix Houllevigue	1912
Prix Poncelet	1914
Prix Saintour	1917
Prix Petit d'Ormoy	1919

La Section de Géométrie m'a présenté,

En troisième ligne	en 1912 et en 1919
En deuxième ligne	en 1921

LISTE DES PUBLICATIONS

FAITES DANS DES JOURNAUX SCIENTIFIQUES

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Sur les Intégrales singulières (3ᵉ série, t. I, 1909).
2. Remarque sur un énoncé dû à Stieltjès et concernant les intégrales singulières (3ᵉ série, t. I, 1909).
3. Exposé géométrique d'un Mémoire de Cayley sur les polygones de Poncelet (3ᵉ série, t. XIII, 1922).

Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.

4. Sur les séries trigonométriques (3ᵉ série, t. XX, 1903).
5. Sur l'intégration des fonctions discontinues (3ᵉ série, t. XXVII, 1910).
6. Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration (3ᵉ série, t. XXXV, 1918).
7. Sur une définition due à M. Borel (3ᵉ série, t. XXXVII, 1920).

Annali di Matematica pura ed applicata.

8. Intégrale, longueur, aire (3ᵉ série, t. VII, 1902); publié aussi comme Thèse de Doctorat.

Atti della reale Accademia delle Science di Torino.

9. Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans qu'on peut définir par des procédés analytiques (Extrait d'une lettre à M. Corrado Segre; t. XLII, 1907).

Bulletin de la Société Mathématique de France.

10. Sur le problème des aires (t. XXXI, 1903 et t. XXXIII, 1905).
11. Une propriété caractéristique des fonctions de classe un (t. XXXII, 1904).

12. Sur la théorie des ensembles (lettre à M. Borel) (t. XXXIII, 1905).
13. Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo (t. XXXV, 1907).
14. Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équatiou de Fredholm (t. XXXVI, 1908).
15. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisaut à une condition de Lipschitz (t. XXXVIII, 1910).
16. Sur un théorème de M. Volterra (t. XL, 1912).
17. Sur certaines démonstrations d'existence (t. XLV, 1917).
18. Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes (t. XLIX, 1921).

Bulletin des Sciences Mathématiques.

19. Sur l'approximation des fonctions (t. XXII, 1898).
20. Sur les transformations de contact des surfaces minima (t. XXVI, 1902).
21. Sur la représentation analytique à partir de $z = x + iy$ des fonctions continues de x et y (t. XXXVII, 1903).
22. Remarques sur la définition de l'intégrale (t. XXIX, 1905).
23. Analyse d'un ouvrage de M. et M[me] W. H. Young « The theory of sets of points » (t. XXXI, 1907).
24. Analyse du tome II (3e édition) du Cours d'analyse de l'École Polytechnique par M. C. Jordan (t. XXXIX, 1915).
Analyse du tome III du même ouvrage (t. XXXXII, 1918).
25. Analyse d'un ouvrage de M. de la Vallée Poussin : Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle (t. XXXXIV, 1920).
26. A propos d'un nouveau journal mathématique : Fundamenta Mathematicæ (t. XXXXVI, 1922).
27. Analyse de la thèse de M. Antoine (t. XXXXVI, 1922).

Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France.

28. Sur la non-applicabilité de deux espaces d'un nombre différent de dimensions (1911).
29. Sur le théorème de la moyenne de Gauss (1911).
30. Sur les fonctions permutables de M. Volterra (1912).
31. Sur les cas d'impossibilité du problème de Dirichlet (1912).
32. Observations sur une communication de M. Z. de Geöcze (1913).
33. Sur l'équivalence du problème de Dirichlet et du problème du calcul des variations considéré par Riemann (1913).

34. Sur les courbes orbiformes (1914).
35. Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante (1914).
36. Sur des problèmes isopérimétriques (1918).
37. Sur les polygones de Poncelet (1919).
38. Sur le théorème de la moyenne et le problème de Dirichlet (1920).
39. Sur les polygones de Poncelet (1920).
40. Sur les ombilics d'une quadrique (1920).

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.

41. Sur les fonctions de plusieurs variables (t. CXXVIII, 1899).
42. Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan (t. CXXVIII, 1899).
43. Sur la définition de l'aire d'une surface (t. CXXIX, 1899).
44. Sur la définition de certaines intégrales de surface (t. CXXXI, 1900).
45. Sur le minimum de certaines intégrales (t. CXXXI, 1900).
46. Sur une généralisation de l'intégrale définie (t. CXXXII, 1900).
47. Un théorème sur les séries trigonométriques (t. CXXXIV, 1902).
48. Sur l'existence des dérivées (t. CXXXVI, 1903).
49. Sur une propriété des fonctions (t. CXXXVII, 1903).
50 Sur les fonctions représentables analytiquement (t. CXXXIX, 1904).
51. Sur une condition de convergence des séries de Fourier (t. CXL, 1905).
52. Sur la divergence et la convergence non uniforme des séries de Fourier (t. CXLI, 1905).
53. Sur le problème de Dirichlet (t. CXLIV, 1907).
54. Sur le problème de Dirichlet, deuxième note (t. CXLIV, 1907).
55. Sur les suites de fonctions mesurables (t. CXLIX, 1909).
56. Sur l'intégrale de Stieltjès et sur les opérations fonctionnelles linéaires (t. CL, 1910).
57. Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées (t. CLII, 1911).
58. Sur le problème de Dirichlet (t. CLIV, 1912).
59. Sur le principe de Dirichlet (t. CLV, 1912).

Fundamenta Mathematicæ.

60. Sur les correspondances entre les points de deux espaces (t. II, 1921).

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

61. Sur les fonctions représentables analytiquement (6ᵉ série, t. I, 1905).

62. Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le calcul des variations (8ᵉ série, t. IV, 1921).

L'Enseignement mathématique.

63. Sur la définition de l'aire des surfaces (t. X, 1908).

L'Intermédiaire des Mathématiciens.

64. Sur l'égalité des polyèdres (t. XXI, 1909).

Mathematische Annalen.

65. Recherches sur la convergence des séries de Fourier (Bd. LXI, 1905).

66. Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant à des espaces à n et à $n+p$ dimensions (extrait d'une lettre à M. O. Blumenthal) (Bd. LXX, 1911).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

67. Sur l'équilibre du corps solide (4ᵉ série, t. IX, 1909),

68. Sur un théorème de M. R. Bricard (4ᵉ série, t. X, 1910).

69. Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton (4ᵉ série, t. XII, 1912).

70. Sur les arcs d'épicycloïdes (4ᵉ série, t. XVI, 1916).

71. Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford (4ᵉ série, t. XVI, 1916).

72. Sur deux théorèmes de Mannheim et de M. Bricard concernant les lignes de courbure et les lignes géodésiques des quadriques (4ᵉ série, t. XVIII, 1918).

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

73. Sur le problème de Dirichlet (t. XXIV, 1907).

74. Sur la représentation approchée d'une fonction (extrait d'une lettre à M. E. Landau) (t. XXVI, 1908).

Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei.

75. Sur les fonctions dérivées (3ᵉ série, t. XV, 1906).
76. Encore une observation sur les fonctions dérivées (3ᵉ série, t. XVI, 1907).
77. Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration (3ᵉ série, t. XVI, 1907).

Revue de l'Enseignement des Sciences.

78. Sur l'équilibre du corps solide (1909).
79. Sur les programmes d'arithmétique et d'algèbre (1910).
80. Quelques leçons sur les courbes épicycloïdales (1915).
81. Sur les angles polyèdres (1916).
82. Sur les angles polyèdres, deuxième article (1916).
83. Sur un problème de minimum (1918).

Revue scientifique.

84. Les professeurs de Mathématiques au Collège de France. — Humbert et Jordan; Roberval et Ramus. — Leçon d'ouverture professée au Collège de France (60ᵉ année, avril 1922).

OUVRAGES SÉPARÉS

85. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904).
86. *Démonstration d'un théorème de M. Baire* (note II des *Leçons sur les fonctions de variable réelle et les développements en série de polynômes de M. E. Borel*; Paris, Gauthier-Villars, 1905).
87. *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1906).

INTRODUCTION

Avant d'aborder l'examen détaillé de mes travaux, qui se rattachent presque tous à la théorie des fonctions de variables réelles, je veux, dans cette introduction, rappeler le prodigieux essor pris par cette théorie durant ces trente dernières années, malgré les préventions qui s'élevaient contre elle ; car je crois bien que mon principal titre est d'avoir été l'un de ceux qui, en diminuant singulièrement ces préventions, ont contribué à cet essor et peut-être celui qui a le mieux montré quelles ressources puissantes pour le progrès des parties même les plus classiques des mathématiques pouvaient être obtenues par l'examen patient et prolongé des propriétés des fonctions de variables réelles.

Pour bien montrer l'état des esprits au moment où j'ai commencé mes recherches, j'indiquerai certaines résistances que j'ai rencontrées ; tous ceux qui se sont consacrés au même genre d'études ont rencontré des résistances analogues. Je puis le faire sans scrupule, car il ne s'est jamais agi que de conflits d'idées, et j'ai toujours trouvé la plus grande bienveillance personnelle chez ceux-là même à qui mes travaux étaient le moins sympathiques.

En 1899, j'avais remis à M. Picard une Note **[42]** (¹) sur les surfaces non réglées applicables sur le plan ; Hermite voulut un instant s'opposer à son insertion dans les *Comptes Rendus* de l'Académie ; M. Picard dut défendre ma Note. On sait combien, cependant, Hermite était bienveillant et prodigue d'éloges, mais c'était à peu près l'époque où il écrivait à Stieltjès : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées », et il aurait voulu voir exclues du domaine des mathématiques toutes les recherches où ces horrifiques fonctions intervenaient. Or, dans ma Note, je considérais des fonctions qui n'avaient pas, nécessairement une dérivée. Pour beaucoup de mathématiciens, je devins l'homme des fonctions sans dérivée, encore que, à aucun moment, je ne me sois attaché à l'étude et à la considération de ces fonctions. Et, comme l'horreur que manifestait Hermite était ressentie par presque tous, dès que j'essayais de prendre part à une conversation mathématique il se trouvait un Analyste pour me dire :

(¹) Les numéros entre crochets renvoient à la liste des publications.

« Cela ne peut vous intéresser, il s'agit de fonctions ayant une dérivée », et un Géomètre pour répéter en son langage : « Nous nous occupons de surfaces ayant un plan tangent ».

Darboux avait consacré son Mémoire de 1875 à l'intégration et aux fonctions sans dérivée; il ne ressentait donc pas la même horreur qu'Hermite. Pourtant, je doute qu'il m'ait jamais pardonné entièrement ma Note sur les surfaces applicables; pendant longtemps, il ne s'intéressa guère à mes Mémoires sur l'intégration qui, en un certain sens, prolongeaient cependant le sien. On raconte qu'en 1875, Darboux fut quelque peu blâmé de s'être laissé aller à étudier de pareilles questions; soit à cause de ces remontrances, soit plutôt à cause de la beauté et de l'importance des problèmes qu'il a ensuite abordés, Darboux ne fit pas d'autre incursion dans le domaine des fonctions non analytiques. Les résultats si nombreux et si élégants qu'il a obtenus ailleurs l'ont sans doute conduit, d'abord, à se féliciter d'avoir abandonné l'étude des fonctions générales de variables réelles, ensuite à considérer que ceux qui s'appesantissaient dans cette étude perdaient leur temps au lieu de le consacrer à des recherches utiles.

Bien que, d'un certain point de vue théorique, toute recherche consciencieuse soit utile, l'histoire des Sciences nous montre que de nombreuses études ne le furent pas pratiquement, parce qu'elles ne vinrent pas à leur heure. On s'accordait généralement à trouver prématurée l'étude des fonctions de variables réelles.

M. Borel, qui a toujours beaucoup espéré de la théorie des ensembles, a été, je crois, le premier à penser que mes travaux auraient une utilité en quelque sorte pratique. Il l'a, en tout cas, pensé bien avant moi; je me vois encore hésitant avant de me décider à présenter, comme thèse de Doctorat, le Mémoire où j'ai abordé presque toutes les recherches que j'ai développées par la suite. Je sentis bien, dès le début, que de telles études étaient utiles; je n'aurais su dire dans quelle mesure elles l'étaient. Un peu plus tard, en 1903, j'insistais sur la nécessité de ces études dans la préface de mes *Leçons sur l'Intégration*. Dans une analyse de ce livre, M. Picard, tout en m'encourageant comme il l'a toujours fait depuis le premier jour, laissait percer quelque inquiétude au sujet des exagérations possibles de la tendance que je représentais.

Plus tard encore, en 1909, pour ceux qui continuaient à contester l'utilité de mes travaux, M. Painlevé, à l'occasion d'une importante communication de M. Denjoy, écrivait dans les *Comptes Rendus* : « Il convient de signaler le rôle joué dans ce résultat, par l'extension, due à M. Lebesgue, de l'intégrale définie. Grâce à cette opération, que nombre de géomètres trouvaient artificielle et trop abstraite, une question naturelle, une question fondamentale, qui restait indécise à l'entrée de la théorie des fonctions uniformes, est aujourd'hui tranchée. »

Ces préventions contre les études sur les fonctions de variables réelles, si répandues que je les ai retrouvées presque chez tous — chez ceux qui avaient fait de

telles études, chez ceux qui m'avaient constamment encouragé, ainsi que chez moi-même — étaient-elles entièrement dépourvues de fondement? Jusqu'à ces derniers temps, la plupart des travaux sur les fonctions réelles, ceux concernant les séries trigonométriques exceptés, se réduisaient à des remarques, parfois très élégantes, mais sans lien, ne formant nul corps de doctrines et n'ayant servi pratiquement à rien.

D'une part, beaucoup d'énoncés étaient négatifs : grâce à des exemples, souvent très ingénieux, on prouvait que telle définition, que telle propriété, qui semblait générale, ne l'est pas en réalité, et cela conduisait à des fonctions effarantes. On pouvait donc prétendre, non sans apparence de raison, que ces recherches avaient quelque chose de déprimant, qu'elles étaient une école de doute et non d'action; qu'au lieu de dire aux jeunes, prêts à s'élancer avec fougue : « Le terrain vous paraît sûr, mais attention ! en réalité les obstacles et les précipices y abondent », il eût été préférable de pouvoir leur dire : « Là où vous ne voyez qu'obstacles et précipices, je vais vous montrer le terrain sûr. »

On cherchait bien, d'autre part, des énoncés positifs. Malheureusement, une propriété ou une définition ayant été reconnue spéciale, cherchait-on à la généraliser, qu'on aboutissait trop souvent à une notion certes nouvelle, mais ne servant à rien d'autre qu'à être définie; tel avait été le cas pour la notion, cependant si naturelle, d'intégrale par excès ou par défaut, due à Darboux. Cherchait-on les fonctions les plus générales possédant une certaine propriété ou auxquelles s'appliquait une certaine définition, qu'on aboutissait à une classe de fonctions, variable avec la propriété ou la définition envisagée, et qui, par suite, ne pouvait s'introduire naturellement dans aucune recherche; tel avait été le cas pour la classe des fonctions intégrables au sens de Riemann.

On en était encore à la phase observation; on explorait l'amas désordonné des fonctions pour y découvrir des catégories intéressantes, mais, comme on ne savait pas expérimenter sur les fonctions, c'est-à-dire calculer avec elles, s'en servir, on manquait totalement de critères pour juger qu'une catégorie était intéressante. Sans nier la portée que pourraient avoir plus tard les diverses recherches auxquelles je viens de faire allusion — et qu'elles ont en effet maintenant — on pouvait donc penser qu'il y avait plus pressé et qu'il convenait de suspendre ces recherches jusqu'au moment où leur nécessité s'imposerait.

En dépit de l'indifférence et parfois de l'opposition manifestées à l'égard de la théorie des fonctions de variables réelles, cette théorie se constituait sans qu'on s'en rendît compte, grâce aux études spéciales, mais peut-être surtout grâce à l'analyse classique. De plus en plus souvent, en effet, il arrivait, comme cela s'était produit autrefois pour les séries trigonométriques, que l'on rencontrait des fonctions dont l'analyticité n'avait pas besoin d'être supposée. Il en est ainsi, par exemple, dans l'étude des solutions des équations différentielles faites par la méthode de Cauchy-

Lipschitz ou par celle des approximations successives de M. Picard; dans la plupart des solutions du problème de Dirichlet et des problèmes analogues; dans la résolution des équations intégrales. Parfois, certaines des données ou des solutions pouvaient être ou même étaient nécessairement des fonctions discontinues; il en est ainsi pour les deux derniers problèmes que je viens de citer, pour certaines questions d'hydrodynamique ou du calcul des variations; d'autres fois, comme dans une question étudiée par M. Borel, la solution est bien continue, mais elle est nécessairement non analytique. On se familiarisait ainsi avec cette idée qu'une discontinuité, une singularité n'est pas nécessairement une monstruosité.

D'autre part, des recherches comme celles de Poincaré sur la forme des intégrales réelles des équations différentielles, ou celles de M. Hadamard sur les géodésiques, montraient quelles conséquences lointaines et importantes pouvaient résulter du fait qu'une fonction réelle possède ou non une certaine propriété. On apprenait ainsi lentement à regarder ces fonctions réelles, à discerner qu'à leur sujet, tout aussi bien qu'au sujet des fonctions analytiques, bien des questions fondamentales devaient être posées. La méthode directe du calcul des variations, à laquelle resteront attachés les noms d'Arzelà et de M. Hilbert, l'étude des développements déduits de l'équation de Fredholm allaient poser nombre de ces problèmes.

On se trouvait d'ailleurs, et depuis peu de temps, en possession d'un outil indispensable : la théorie des ensembles de points. Dès le début de cette théorie, Cantor, du Bois-Reymond, par exemple, en firent des applications aux fonctions réelles. C'est cependant surtout dans l'étude des fonctions de variable complexe qu'on l'avait utilisée; les auteurs à citer seraient nombreux depuis M. Mittag-Leffler jusqu'à Poincaré, jusqu'à MM. Borel, Goursat, Painlevé, par exemple.

Les modes de raisonnement qui intervenaient dans ces recherches furent, dans la suite, appliqués à la théorie des fonctions de variables réelles. C'est pourquoi, avant d'avoir rien publié sur les fonctions de variable réelle, M. Borel avait déjà rendu les services les plus éminents à la théorie de ces fonctions en introduisant des notions, comme celle de mesure, dont le rôle a été capital et surtout en inaugurant certains modes de raisonnements, par exemple en nous apprenant qu'on peut souvent utiliser un ensemble dénombrable exactement comme s'il ne contenait qu'un nombre fini d'objets [**6**].

En osant incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours de l'École Polytechnique, Jordan réhabilitait en quelque sorte cette théorie; il affirmait qu'elle est une branche utile des mathématiques. Il faisait plus que l'affirmer, il le prouvait par ses recherches sur la mesure des aires et des ensembles, sur l'intégration qui, comme ses études sur la rectification des courbes, sur les séries trigonométriques, sur l'*analysis situs*, ont si bien préparé certains travaux, les miens en particulier.

M. René Baire fut le premier à consacrer toute son activité mathématique à la

théorie des fonctions de variables réelles; il sut y trouver le sujet de recherches longues et fondamentales. On ne dira jamais assez l'importance des travaux de ce savant dans la genèse du mouvement actuel; c'est à sa fine analyse que nous devons de savoir discerner tant de propriétés qualitatives des fonctions, et les faire intervenir dans nos raisonnements. De plus et surtout, M. Baire a établi une sorte de hiérarchie des fonctions; les fonctions qu'il a ainsi classées, les fonctions de Baire, comme les appelle M. de la Vallée Poussin, comprennent toutes celles qu'on avait nommées jusque-là, même ces fonctions si étranges qu'on avait formées comme exemples des singularités les plus inattendues. L'importance des fonctions analytiques vient de ce qu'elles forment une famille cohérente en ce sens que, lorsqu'on calcule à partir de fonctions de cette famille, on obtient comme résultat une fonction de la même famille, du moins le plus souvent. Les fonctions de Baire forment une famille cohérente au même titre; pour elles, la propriété indiquée ne souffre même plus d'exception. Dans bien des questions, il n'existe aucune famille naturelle de fonctions plus vaste que celle des fonctions analytiques et moins vaste que celle des fonctions de Baire.

On peut dire que l'analyse classique visait surtout l'étude des fonctions analytiques; l'étude des fonctions de Baire est le domaine de l'analyse moderne. Les travaux qui se rapportent à cette nouvelle analyse se rangent en deux catégories : travaux relatifs à la représentation des fonctions, travaux relatifs aux calculs sur les fonctions. Les beaux Mémoires de M. Baire appartiennent à la première catégorie; après lui, je me suis occupé aussi de ces questions, mais c'est seulement de ceux de mes travaux qui se rangent dans la seconde catégorie que je parlerai ici.

J'ai dit qu'on ne savait pas calculer avec les fonctions générales; on savait bien, $f(x)$ étant donnée pour $x = x_0$, utiliser le nombre $f(x_0)$ dans une addition, par exemple; mais cela c'est calculer sur un nombre et non sur une fonction, c'est faire de l'algèbre et non de l'analyse. Les opérations portant vraiment sur les fonctions, celles où les fonctions interviennent comme un tout et non comme un catalogue de nombres à utiliser *successivement*, les opérations fonctionnelles comme on les appelle, font intervenir *simultanément* toutes les valeurs d'une fonction. L'intégration et la dérivation sont des opérations fonctionnelles; pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, il faut connaître $f(x)$ depuis a jusqu'à b; pour calculer $f'(x_0)$, il faut connaître $f(x)$ depuis $x_0 - h$ jusqu'à $x_0 + h$.

Leibniz et Newton ont fondé l'Analyse parce qu'ils ont défini l'intégration et la dérivation. Toutes les opérations fonctionnelles qui se sont ensuite introduites dérivent de ces deux là, et c'est pourquoi on continue souvent à diviser le calcul infinitésimal en calcul différentiel et en calcul intégral.

Pour que des fonctions puissent servir à quelque chose, pour qu'on puisse calculer avec elles, il faut avoir défini des opérations fonctionnelles qui s'y appliquent,

et le mieux serait évidemment de définir pour elles, tout d'abord, l'intégration et la dérivation. C'est précisément ce que j'ai eu la bonne fortune de faire.

Partant de principes très simples, j'ai réussi à donner de l'intégrale une définition aussi facile à manier que celle relative aux fonctions continues, et qui, contrairement à ce qu'on aurait pu craindre, apporte des simplifications et non des complications. Elle est pourtant si générale qu'elle s'applique à toutes les fonctions bornées que l'on peut rencontrer, car la nouvelle opération s'applique à toute fonction bornée rentrant dans la classification de M. Baire. Les fonctions ainsi intégrables, les fonctions *sommables*, ne forment donc pas une classe artificielle et particulière comme les fonctions intégrables au sens de Riemann. On ne connaît aucune fonction bornée qui ne soit sommable.

Malgré la grande généralité de l'opération de l'intégration, on peut définir pour elle une opération inverse, ce qui pourtant n'avait pas été fait pour le cas plus simple de l'intégration au sens de Riemann. Pour les fonctions d'une variable, cette opération inverse est, presque en tout point, la dérivation ordinaire qui se trouve ainsi étendue à une vaste classe de fonctions; avec quelque imprécision, on peut dire à toutes les fonctions à variation bornée. Résultat assez curieux si l'on songe que jusque-là on savait seulement qu'il y a des fonctions qui ont une dérivée et d'autres qui n'en ont pas. Sans doute, la classe des fonctions dérivables ainsi trouvée n'apparaît pas avec ce caractère de généralité impressionnant que possède la classe des fonctions sommables, elle participe cependant de cette généralité : l'intégration indéfinie de toute fonction sommable fournissant une fonction à variation bornée. Au reste, cette classe de fonctions n'est pas artificielle, car Jordan ne l'introduisit dans la Science que parce qu'elle s'était imposée avec nécessité dans les études sur la rectification des courbes; entre les mains de Jordan, elle a montré tout de suite son importance dans plusieurs questions, dans l'étude des séries trigonométriques, par exemple.

Pour les fonctions de plusieurs variables, l'opération inverse de l'intégration, qu'on ne considérait guère, même en ce qui concerne l'intégration des fonctions continues, est encore une sorte de dérivation; elle s'applique à une famille naturelle de fonctions : les fonctions d'ensemble qui sont à variation bornée.

En possession d'opérations applicables à de très vastes classes de fonctions, on peut, dès lors, aborder bien des problèmes; soit des problèmes calqués sur ceux de l'analyse classique, soit même des problèmes de cette analyse qu'on avait laissé de côté jusque-là parce que la considération des fonctions discontinues n'en pouvait être écartée. C'est ainsi que mes résultats sur l'intégration et la dérivation ont été utilisés pour le calcul des fonctions primitives et pour l'étude de l'existence des dérivées; pour l'étude des séries de Fourier, des autres séries trigonométriques et des séries qui les généralisent; pour l'étude des intégrales singulières et des développements qui en résultent; pour l'étude des équations intégrales et des séries

qu'on en déduit; pour l'étude du problème de Dirichlet et de la représentation conforme: pour l'étude du calcul des variations; pour l'étude des opérations fonctionnelles: pour l'intégration des différentielles totales et la recherche des conditions d'existence des fonctions analytiques; pour la construction de fonctions analytiques données de certaines singularités; pour l'étude des propriétés des fonctions analytiques au voisinage de leurs singularités et, en particulier, pour l'étude de la convergence de certaines expressions, comme la formule de Poisson, au voisinage d'une ligne singulière ou sur cette ligne, etc., par M[me] Grace Chisholm Young, par MM. Caratheodory, Denjoy, Fatou, Fejér, Fischer, Fréchet, Fubini, Haar, Hahn, Hardy, Hausdorff, Hedrich, Hellinger, Hobson, Dunham Jackson, Jerosch, B. Levi, Lichstenstein, Lusin, Mazurkiewicz, Montel, Ch. N. Moore, Plancherel, Picard, Pierpont, Pompeiu, Pringsheim, Radon, Rajchmann, F. Riesz, M. Riesz, Severini, Sierpinski, Steinhaus, Souslin, Tœplitz, Tonelli, de la Vallée Poussin, Van Vleck, Vitali, Weyl, Young, et bien d'autres.

Il est intéressant de noter que certains de ces Auteurs n'ont publié aucun travail relatif, spécialement, à la théorie des fonctions, mais que, pour la solution d'un problème posé par l'analyse, ils ont trouvé, dans cette théorie, des ressources qui leur étaient indispensables; c'est ainsi que j'ai pu signaler, non sans fierté, M. Picard comme étant l'un de ceux qui utilisèrent les notions nouvelles. Ces notions jouent en effet un rôle essentiel dans ses belles recherches sur les équations intégrales linéaires de première espèce.

D'autres Auteurs ont, au contraire, publié des travaux étendus relatifs aux fonctions de variables réelles. Au premier rang de ceux-ci, je tiens à signaler M. de la Vallée Poussin, qui a fait faire tant de progrès à la nouvelle théorie et qui est le plus autorisé et le plus écouté de ses protagonistes. Grâce aux efforts de tous, la théorie des fonctions de variables réelles a pris une importance telle que, dans de nombreuses Universités étrangères, des cours spéciaux lui ont été consacrés. A ma connaissance, de tels cours ont été professés en Allemagne, en Amérique, en Angleterre, en Autriche, en Espagne, en Italie, en Pologne, en Russie, en Suède, ainsi qu'en France, au Collège de France. De nombreux livres d'enseignement ont aussi été publiés; ils sont dus à des savants allemands, américains, anglais, autrichiens, belges et italiens. En France, plusieurs livres de la collection dirigée par M. Borel sont consacrés à ces sujets. Sans doute, autrefois, bien avant mes recherches par exemple, il existait des ouvrages traitant de la théorie des fonctions, mais qui n'ont presque rien de commun avec les livres actuels. Le Livre bien connu de mon Maître Jules Tannery, par exemple, est une simple Introduction à la théorie des fonctions analytiques d'une variable; l'ouvrage classique de Dini prépare surtout l'étude de la représentation des fonctions continues à l'aide de séries analogues à celles de Fourier. Parmi les différences entre les ouvrages anciens et les ouvrages récents, je signalerai que ce n'est que dans ces tout derniers temps qu'on a commencé à voir dans les fonctions

de plusieurs variables autre chose qu'une collection de fonctions d'une variable; la représentation des fonctions de Baire, l'intégration et la dérivation, et bien d'autres problèmes s'étudient directement pour le cas de plusieurs variables et l'on obtient ainsi des résultats essentiels qui auraient été cachés si l'on s'était borné à considérer les fonctions d'une variable fournies par les fonctions de plusieurs variables étudiées.

La plupart des traités signalés plus haut sont spécialement consacrés à la nouvelle théorie, mais il s'en trouve aussi où certaines parties de cette théorie nouvelle sont exposées à côté de Chapitres traitant de l'Analyse classique. Ce sont ces ouvrages que je préfère; il ne faut pas qu'une Analyse dissidente grandisse en voulant ignorer l'Analyse classique; il faut que celle-ci s'incorpore les plus féconds résultats des recherches récentes. C'est peut-être à cause de cette préférence, qu'en voyant la place considérable que tiennent mes travaux personnels dans certains traités volumineux consacrés à la nouvelle Analyse, j'ai parfois pensé que leurs Auteurs exagéraient.

Insister sur cette impression serait trop contraire au but de cette Notice; je reviens à ce but en faisant observer que mon activité ne s'est pas limitée à des études connexes à l'intégration et à la dérivation, les seules auxquelles il sera fait allusion dans cette Introduction. Je veux cependant dire ici que toutes mes recherches ont ce caractère commun de procéder d'une vue directe, et en quelque sorte géométrique, des problèmes étudiés. Ce caractère a été assez généralement méconnu et l'on emploie souvent le qualificatif « abstrait » en parlant de mes travaux, comme on l'emploie d'ailleurs toujours dés qu'il s'agit d'applications de la théorie des ensembles. Certes, dans cette théorie, il y a des parties abstraites; on les place volontiers au début, aussi, ceux qui n'ont fait qu'aborder l'étude des ensembles et l'ont ensuite abandonnée, gardent-ils le souvenir de considérations abstraites, comme ce serait le cas pour celui qui n'aurait pas poussé l'étude de l'Analyse plus loin que la définition des irrationnelles. Mais c'est la considération des ensembles de points qui a jusqu'ici servi presque uniquement; or un ensemble de points est une figure géométrique au même titre qu'un polygone. La notion de variable réelle, c'est-à-dire de nombre irrationnel quelconque, est aussi d'origine géométrique; un professeur n'exposera jamais cette notion sans s'aider d'une figure qu'on peut, du point de vue logique, déclarer inutile et même nuisible et qui, pour beaucoup d'esprits, est cependant pratiquement indispensable à la compréhension. La base de la théorie des fonctions de variables réelles étant de nature géométrique, comme l'outil qu'on y emploie, on ne doit pas s'étonner que son étude s'apparente à celle de l'espace, à la géométrie de situation, et même à la géométrie ordinaire, qu'on y utilise souvent les mêmes raisonnements et les mêmes figures.

Les développements analytiques ont pris en mathématiques une place telle que nous oublions volontiers qu'ils ne sont qu'un moyen et non un but; peu à peu, nous considérons les symboles du calcul comme les seules réalités; toute recherche où il

y a du calcul est, sans hésitation, déclarée concrète, tandis que les autres sont qualifiées d'abstraites. On classe dans la géométrie des mémoires où tout est formel, où l'on part de formules pour arriver à des formules, où tout se passe dans le domaine complexe, mais on exclut de la géométrie des recherches, comme celles de Jordan sur les courbes fermées, dans lesquelles on étudie, sans symboles interposés, des faits du monde presque sensible de la géométrie. Si l'on réagit contre ces habitudes d'esprit, on reconnaîtra que les nouvelles recherches sont bien d'essence géométrique, qu'elles ne sont pas abstraites, mais parfois très délicates, parce qu'il y faut faire attention à des faits géométriques non considérés jusque-là, qu'il y faut déduire longuement à partir de distinctions inhabituelles, que l'on qualifie de subtiles, parce qu'elles sont fécondes alors qu'on les croyait puériles et sans portée.

Plus tard, on inventera sans doute des algorithmes qui permettront une étude analytique des fonctions de variables réelles, ce sera un grand progrès ; pour l'instant, notre seule ressource est d'imiter les modes de raisonnement de la géométrie dite synthétique. Dans tout le cours de mes études, je me suis toujours particulièrement intéressé aux raisonnements où n'intervenait aucun mécanisme analytique ; c'est sans doute à cette prédilection que je dois d'avoir pu m'inscrire après Darboux, Jordan, M. Baire et M. Borel, comme l'un des fondateurs d'une théorie dans l'édification de laquelle notre Pays tient la première place.

CHAPITRE PREMIER

INTÉGRATION ET DÉRIVATION

Bien que mes travaux aient surtout porté sur l'intégrale définie, ils m'ont conduit à envisager la notion d'intégrale indéfinie sous un aspect nouveau. Sans respecter l'ordre de mes recherches, je vais tout d'abord exposer cette notion, en me bornant au cas des fonctions continues. Elle prend alors une signification physique si claire qu'il aurait été sans doute habile de ma part de ne faire voir ce cas particulier qu'au travers de la complexité du cas général. Mais le Lecteur se dira qu'une notion n'a toute son utilité qu'au moment où on l'a assez bien comprise pour arriver à croire qu'on l'a toujours possédée et pour être devenu incapable d'y voir autre chose qu'une remarque banale et immédiate. La forme que je donne à la notion d'intégrale indéfinie est, à la vérité, très banale et j'ai eu tort de la déclarer nouvelle, car c'est la plus ancienne de toutes. Les Mathématiciens ne s'en étaient écartés que pour des soucis de rigueur et pour des raisons de commodité. En y revenant, on groupe bien les diverses formes d'intégration que l'on est actuellement obligé, dans les Cours, d'étudier successivement.

L'examen préalable de l'intégration des fonctions continues préparera et abrégera l'exposé de mes travaux sur l'intégration des fonctions discontinues. D'ailleurs, il ne sera peut-être pas indifférent au Lecteur, au moment où il arrivera aux parties délicates de la théorie, d'avoir été averti que le but vers lequel on l'entraîne est simple et qu'il n'y a, dans toutes ces recherches, que l'analyse mathématique d'une des données de la physique.

Intégration des fonctions continues.

L'intégrale définie. — Lorsqu'on ouvre un traité d'analyse, on est frappé de la place qu'y occupent les définitions des diverses intégrales de fonctions continues que l'on considère : intégrale simple, intégrale curviligne, intégrale double, intégrale de surface, intégrale multiple, intégrale étendue à une variété. Pourtant, il s'agit bien d'une notion unique, car, dans les applications, dans le calcul de la masse ou des coordonnées du centre de gravité d'un corps, par exemple, on ne distingue pas, ou l'on distingue d'un seul mot, les cas d'un corps à trois dimensions, d'une lame ou d'un fil, et l'on n'étudie pas séparément les fils rectilignes et les fils curvilignes, les

lames planes et les lames gauches. Dans ces applications, il y a toujours un support géométrique, un corps, par rapport auquel on intègre et une fonction continue définie pour les points de ce corps, une fonction de point $f(\mathrm{P})$, et l'intégrale s'obtient comme la limite de valeurs approchées calculées par le procédé classique suivant : on partage le corps en petits corps partiels, dans chacun d'eux, on choisit un point; ainsi, on choisira le point P_i dans le corps dont m_i est la mesure (longueur, aire ou volume); la valeur approchée de l'intégrale est $\sum m_i f(\mathrm{P}_i)$. Il y a donc bien une définition commune à toutes les intégrales; pourquoi ne la pose-t-on pas une fois pour toutes? c'est que les nombres m_i sont eux-mêmes définis par des intégrales, sauf dans le cas où il s'agit d'une intégrale simple. L'exposition classique est en parfait accord avec cette tendance à tout construire logiquement à partir de l'idée de nombre, qui remonte à Descartes ; en se servant de coordonnées, Descartes ramenait en effet toute géométrie à la géométrie de la droite, c'est-à-dire à la notion de nombre. Sans renoncer à ce souci logique, on pourrait faire, sans emploi d'intégrales, une étude des divers nombres m_i, parallèle à celle que l'on fait, grâce à la définition des incommensurables, quand les m_i sont des mesures de segments, et donner ainsi plus d'unité et de simplicité au début du calcul intégral.

Dans le cas d'une intégrale simple, la valeur approchée s'écrit :

$$\sum f(\mathrm{P}_i)m_i = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

ξ_i étant l'abscisse du point P_i de l'intervalle (x_{i+1}, x_i) dont la mesure est $m_i = x_{i+1} - x_i$. Dans cette expression, la variable x a un triple rôle : 1° Les valeurs $x = \xi_i$ servent à déterminer les points P_i; 2° les valeurs x_i servent à déterminer le domaine total et les domaines partiels considérés; 3° les nombres $x_{i+1} - x_i$ sont les mesures des domaines partiels. Lorsqu'il s'agit des autres catégories d'intégrales, les variables ne jouent plus que le premier de ces trois rôles. Cette remarque va nous conduire à la notion d'intégrale indéfinie.

Pour une fonction de plusieurs variables, $f(x, y)$ par exemple, on ne considère généralement pas d'intégrale indéfinie bien que l'on appelle quelquefois de ce nom[1] la fonction :

(1) $$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \int_0^{\mathrm{X}} \int_0^{\mathrm{Y}} f(x, y)\,dx\,dy + \varphi(\mathrm{X}) + \psi(\mathrm{Y}),$$

dont les propriétés principales sont résumées par les formules :

(2) $$\int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dx\,dy = \mathrm{F}(b, \beta) + \mathrm{F}(a, \alpha) - \mathrm{F}(b, \alpha) - \mathrm{F}(a, \beta),$$

(3) $$\frac{\partial^2 \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}{\partial \mathrm{X}\, \partial \mathrm{Y}} = f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

---

[1] Voir, par exemple, le *Cours d'Analyse mathématique de M. Goursat*, tome I, page 309.

Malgré la première de ces propriétés, cette fonction apparaît comme relativement peu liée à l'intégrale définie; son véritable rôle, qui est relatif à la propriété (3), se manifeste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique. Dans ses rapports avec l'intégrale définie, l'intégrale indéfinie F(X) d'une fonction $f(x)$,

$$(1') \qquad F(X) = \int_0^X f(x)dx + C,$$

a pour rôle principal de faire connaître l'intégrale définie de $f(x)$ pour n'importe quel domaine d'intégration, grâce à l'égalité

$$(2') \qquad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

F(X) *apparaît en quelque sorte comme un répertoire dans lequel on peut lire immédiatement n'importe laquelle des intégrales définies de* $f(x)$. Une fonction de deux variables ne peut être le répertoire analogue pour la fonction $f(x, y)$, puisque les variables ne peuvent jouer le rôle du 2° : elles ne peuvent déterminer un domaine. Mais la forme du répertoire importe peu, c'est la conception de ce répertoire qui est tout; *nous appellerons donc intégrale indéfinie de* $f(x, y)$ *la correspondance entre un domaine* D *et l'intégrale définie de* $f(x, y)$ *dans* D. C'est la fonction de domaine $\Phi(D)$. Les mots défini et indéfini ayant le sens de déterminé et indéterminé, une intégrale est définie ou indéfinie, suivant qu'elle est étendue à un domaine défini ou indéfini.

Si $f(x, y)$ est une densité, $\Phi(D)$ est la masse du domaine D; si $f(x, y)$ est une vitesse normale, $\Phi(D)$ est le débit à travers la surface D; si $f(x, y)$ est une pression en un point, $\Phi(D)$ est la pression totale sur D; $\Phi(D)$ peut être aussi une quantité de chaleur, une charge électrique, etc... On voit, par ces exemples, que les fonctions de domaine ont un sens physique très clair : *ce sont les nombres qui mesurent des grandeurs*. A cet égard, ces nombres s'introduisent en physique plus primitivement même que les fonctions de point, lesquelles ne servent le plus souvent qu'à *étalonner des qualités*. Initialement, en effet, une densité, une vitesse, une pression en un point étalonnent des qualités, des états, comme une température ou une densité électrique; elles permettent de distinguer des corps plus ou moins denses, des écoulements plus ou moins rapides, etc... Il arrive fréquemment, il est vrai, que l'on puisse préciser assez l'étalonnage primitif pour arriver à définir ce qu'on appelle une grandeur dérivée; mais, lorsqu'on y arrive, c'est toujours par l'intermédiaire d'une fonction de domaine. Le plus souvent même par l'intermédiaire de la fonction de domaine $\Phi(D)$ qui est l'intégrale indéfinie de la fonction de point $f(P)$ considérée; dans ce cas, l'opération consiste à prendre autour de P un petit domaine δ de mesure μ, puis à calculer la

$$(4) \qquad \text{limite } f(P), \text{ pour } \mu \text{ tendant vers zéro, de } \frac{\Phi(\delta)}{\mu}.$$

Lorsque les domaines D sont les intervalles d'une droite, on a la définition ordinaire de la dérivée; dans tous les cas, cette sorte de dérivation est l'opération inverse de l'intégration des fonctions continues.

Représentation des intégrales indéfinies. — Il peut paraître surprenant que, les fonctions de domaine s'introduisant en physique plus primitivement même que les fonctions de point, ce soient cependant ces dernières seules qui aient été considérées. C'est que les fondateurs de l'analyse étaient habitués à manier des expressions algébriques. Or, bien que l'on n'ait jamais entièrement confondu *fonction* et *expression*, que la distinction entre ces notions soient au fond de bien des questions soulevées au cours de la longue querelle des cordes vibrantes, qu'elle apparaisse, même avant Descartes, dans la séparation des courbes en mécaniques et géométriques, ce n'est que vers la fin du dix-neuvième siècle qu'on s'est habitué à raisonner sur des fonctions sans s'occuper de savoir si l'on en possédait ou non une représentation à l'aide des symboles habituels. Nous n'avons aucune expression des fonctions de domaine; on ne comprend même pas comment, actuellement, on pourrait en trouver une puisque nous ne possédons aucun système d'algorithmes propre à la détermination et à la représentation des domaines. Pourtant, la fonction F(X, Y), définie par l'égalité (1), que j'ai appelée l'intégration indéfinie exprimée à l'aide des coordonnées X, Y, permet le calcul approché de $\Phi(D)$ dans tout domaine D et peut, par suite, être considérée comme une expression de $\Phi(D)$; en effet, l'égalité (2) fait connaître Φ dans certains rectangles, puis, par addition, on en déduit Φ dans des domaines aussi voisins qu'on le veut du domaine D donné.

D'une façon plus générale, si, dans la famille des domaines D, nous délimitons une famille spéciale de domaines dépendant de k paramètres, $\Phi(D)$ deviendra une fonction de ces k paramètres. Au point de vue physique, cette fonction de k variables représentera, contrairement à ce que je disais plus haut, une vraie grandeur et non une grandeur dérivée; mais si, mathématiquement, on pourra considérer cette fonction comme une fonction de point, physiquement ce sera une fonction de domaine.

On s'assurera facilement que, dans tous les cas où une fonction d'une ou de plusieurs variables représente une vraie grandeur, cette grandeur est attachée à un corps étendu et non à un point; que c'est une fonction de domaine; on peut prendre pour exemple la masse de l'eau contenue dans un réservoir, cette masse est une fonction de la hauteur du niveau de l'eau.

Ces fonctions de k variables donneront, si elles sont convenablement choisies des représentations de $\Phi(D)$ équivalentes à celles que fournit la fonction F(X, Y). L'inconvénient commun à toutes ces représentations, c'est qu'elles sont artificielles; F(X, Y) est relatif à un choix arbitraire d'axes de coordonnées et varie de façon compliquée dès que ces axes varient. En portant son attention sur $\Phi(D)$ elle-même, on se conforme à une tendance, en quelque sorte inverse de celle dont je parlais plus haut,

qui s'est manifestée d'abord, avec Bobillier, par l'introduction d'équations condensées, ensuite par l'emploi des invariants, puis par l'utilisation de plus en plus fréquente des vecteurs et du calcul différentiel absolu. C'est la tendance à étudier les questions de géométrie et de mécanique plus directement que ne le permet l'emploi des coordonnées.

La considération de $\Phi(D)$ se justifie encore par cette observation : si, particularisant les domaines considérés, on ne conserve, dans le cas du plan, par exemple, que les domaines D limités par une courbe frontière C, une fonction de domaine $\Phi(D)$ est une fonction $\Psi(C)$ de la courbe C, $\Phi(D) = \Psi(C)$. Les fonctions de domaine rentrent donc dans la classe des fonctions de ligne introduites dans la Science par M. Volterra. Les travaux de ce savant, ceux de M. Hadamard, et ceux de leurs élèves ont montré le grand intérêt de ces fonctions, notamment dans le calcul des variations. L'opération de dérivation (4) est d'ailleurs bien la dérivation de $\Psi(C)$ par la méthode de M. Volterra.

Mais nos fonctions de domaine sont des fonctions de ligne très particulières. Si, en effet, le domaine D est formé par la réunion des domaines $D_1, D_2, D_3, \ldots\ldots$, extérieurs les uns aux autres, on a pour toute intégrale indéfinie, ou pour toute grandeur physique ayant pour support géométrique le corps D,

$$\Phi(D) = \Phi(D_1) + \Phi(D_2) + \ldots\ldots \tag{5}$$

Je dis, pour cette raison, que la fonction $\Phi(D)$ est additive. Du point de vue physique, la division de D en corps partiels n'a de sens que si ces corps sont en nombre fini; mathématiquement, nous pouvons, au contraire, en application de l'idée citée de M. Borel, supposer que les D_i forment une infinité dénombrable. Ainsi entendue, l'égalité (5) reste vraie pour les intégrales indéfinies; ce que nous exprimerons, avec M. de la Vallée Poussin, en disant qu'elles possèdent l'additivité complète et non pas seulement l'additivité restreinte. On peut aussi admettre que les grandeurs de la physique possèdent toute l'additivité complète; car il suffit pour cela qu'elles possèdent l'additivité restreinte et un certain genre de continuité qu'on ne saurait refuser aux grandeurs physiques.

Nous verrons que ce ne sont pas seulement les intégrales indéfinies des fonctions continues qui possèdent l'additivité complète, mais aussi toutes les intégrales indéfinies et l'on peut dire que le résultat final des recherches sur l'intégration et la dérivation est que *toute fonction de domaine, possédant les propriétés que nous reconnaissons aux grandeurs physiques, peut être considérée comme une intégrale indéfinie.* A chacune de ces fonctions de domaine $\Phi(D)$ on peut, au moyen d'une opération définie par la relation (4) convenablement interprétée, attacher une fonction de point $f(P)$, définissant une sorte de grandeur dérivée. Ainsi l'égalité

$$\Phi = \text{intégrale indéfinie de } f,$$

pourra être considérée comme fournissant, par l'intermédiaire de f, la représentation de la fonction Φ, dans la mesure où elle est possible en l'absence de tout algorithme propre à la représentation des domaines; il faut remarquer de plus, que l'opération de dérivation à laquelle on semblait devoir renoncer, se trouvera étendue à tout ce que j'ai appelé ici des grandeurs physiques. Ces conclusions seront précisées plus loin.

Pour le cas des fonctions continues, la nouvelle conception de l'intégrale indéfinie peut être commode; on ne saurait pourtant en attendre rien de vraiment neuf. En fait, sans prononcer les mots « fonctions de domaine », on a toujours parlé de ces fonctions dès qu'on s'est occupé de mesure des grandeurs. Cauchy appelle *grandeurs coexistantes* ce que j'appelle des fonctions d'un même domaine, $\Phi(D)$ et $\Psi(D)$; la considération de la limite du rapport $\frac{\Phi(D)}{\Psi(D)}$ quand D tend vers zéro, lui permet de définir la dérivée d'une grandeur par rapport à l'autre. Cette définition est bien en accord avec celle posée plus haut; mais elle est plus générale puisque je n'ai considéré que le cas où la fonction $\Psi(D)$ est la mesure de D.

L'opération inverse de la dérivation considérée par Cauchy est plus générale que l'intégration étudiée jusqu'ici; c'est l'intégration au sens de Stieltjès.

L'intégrale de Stieltjès dans le cas des fonctions continues. — En 1894, Stieltjès a introduit une nouvelle intégration des fonctions continues :

$$\int f(x) d[\alpha(x)] = \lim \sum f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)].$$

Le second membre explique suffisamment le sens de la nouvelle intégration; la valeur approchée pour l'intégrale de Stieltjès ne diffère de celle de $\int f(x)\,dx$ que par le remplacement des mesures $m_i = x_{i+1} - x_i$ des intervalles partiels par les nombres $m'_i = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)$.

Des trois rôles joués par la variable x dans les intégrales simples, elle continue à remplir les deux premiers, mais le procédé de mesure des intervalles doit être modifié de façon à donner, au lieu de la longueur m_i, une nouvelle valeur m'_i.

Or, qu'est-ce que m_i? C'est une fonction de domaines très particulière (la longueur) qui jouit de l'additivité complète, m'_i est une fonction de domaine possédant nécessairement l'additivité restreinte; mais, pour que la limite qui définit l'intégrale existe, quelle que soit $f(x)$ continue, il faut que m'_i possède l'additivité complète, ce qui exige que la fonction $\alpha(x)$ soit à variation bornée. C'est dans ce cas que l'on s'est toujours placé jusqu'ici. En considérant m'_i comme une fonction de domaine complètement additive, on voit clairement ce que c'est qu'une intégrale : intégrer une fonction de point $f(P)$ par rapport à une fonction de domaine complètement addi-

tive m'_i, c'est chercher la limite des sommes $\sum_i m'_i f(\mathrm{P}_i)$. Cette intégrale est dite de Stieltjès, sauf si m'_i est la mesure ordinaire, auquel cas il s'agit d'une intégrale ordinaire.

La notion d'intégrale de Stieltjès s'étend alors d'elle-même aux fonctions continues de plusieurs variables; cette extension a été faite tout d'abord par M. Fréchet, grâce à un procédé différent que celui que je viens d'indiquer; MM. Radon et de la Vallée Poussin ont au contraire employé ce procédé. On voit que l'intégrale de Stieltjès comprend comme cas particuliers non seulement les intégrales ordinaires, mais aussi les intégrales curvilignes et de surface

$$\int_{\mathrm{C}} f(x, y, z)\,dx, \qquad \int\int_{\mathrm{S}} f(x, y, z)\,dx\,dy,$$

pour lesquelles m'_i égale d'une part $x_{i+1} - x_i$, d'autre part $\int\int_{\mathrm{D}_i} dx\,dy$. Cette notion, étudiée au début des cours de calcul intégral, apporterait une grande simplification dans l'exposition.

Si générale qu'elle soit, la notion d'intégrale de Stieltjès peut être généralisée encore; MM. Hellinger et Radon ont étudié des modes d'intégration qui rentrent dans celui, que je crois aussi général que possible, qui serait défini par la considération des sommes de la forme

$$\sum f(\mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_i, \ldots\ldots ; m_i, m'_i \ldots\ldots),$$

les $\mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_i \ldots\ldots$ étant des points pris dans un des domaines partiels D_i, $m_i, m'_i, \ldots\ldots$ étant les valeurs, pour D, de fonctions de domaine données; pour que la limite existe, différentes conditions seraient nécessaires; il faut, en particulier, que f soit homogène et de degré un par rapport à l'ensemble des $m_i, m'_i, m''_i, \ldots\ldots$ Ces intégrales n'ont pas encore été étudiées sous leur forme générale, mais on connaît depuis longtemps des grandeurs exprimées par de telles intégrales; par exemple, la longueur d'une courbe ou l'aire d'une surface,

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad \int\int \sqrt{(dx\,dy)^2 + (dy\,dz)^2 + (dz\,dx)^2}$$

rentrent dans la forme précédente avec trois fonctions de domaine m, m', m''.

Intégration définie des fonctions discontinues.

Intégrale définie. — Dès les premiers temps du calcul infinitésimal, on s'était aperçu que les procédés de calcul, exacts ou approchés, d'une intégrale conservaient un sens pour certaines fonctions discontinues et que le nombre ainsi obtenu continuait à posséder les principales propriétés de l'intégrale. Pendant longtemps, en ce qui concerne l'intégration des fonctions discontinues, on s'est borné à préciser les remarques qui s'étaient ainsi offertes d'elles-mêmes. Riemann présente encore ses recherches comme une simple mise au point de ce qui est connu. Au reste, l'attention était beaucoup plus attirée vers la considération des fonctions qui ne cessaient d'être continues seulement en devenant infinies que vers la considération des fonctions discontinues bornées qui sont bien plus maniables; c'est seulement pour les fonctions non bornées que l'on s'ingéniait à trouver des procédés d'intégration; je citerai, entre bien d'autres, les travaux de Jordan et de M. de la Vallée Poussin.

Soit $f(x)$ une fonction bornée, formons pour elle la quantité $\sum f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=S$. Si, dans chaque intervalle $x_{i+1}-x_i$, $f(x)$ prend des valeurs peu différentes les unes des autres, S variera peu quand on fera varier ξ_i ou quand on subdivisera les intervalles $x_{i+1}-x_i$; c'est sur cette remarque qu'est basée la démonstration très simple de la convergence de S vers une limite, quand f est continue. Cette démonstration subsistera évidemment si f, sans être continue, est telle qu'en prenant des intervalles assez petits on puisse arriver à n'avoir que peu de ces intervalles dans lesquelles f variera de façon notable. Par exemple, si f n'a qu'un point de discontinuité, il n'y aura qu'un intervalle où f variera beaucoup, celui contenant le point de discontinuité.

La théorie de l'intégration au sens de Riemann n'est que le développement de cette observation. Or, que l'on considère les fonctions dérivées quelconques, les fonctions représentables par une série trigonométrique, les fonctions auxquelles se réduit sur le cercle de convergence la partie réelle d'une fonction analytique, etc., on obtient des fonctions qui ne sont pas nécessairement intégrables au sens de Riemann. Aucune des catégories de fonctions auxquelles l'analyse conduit naturellement n'est justiciable du procédé de Riemann; c'est pourquoi ce procédé, qui a eu un rôle philosophique considérable, n'a eu cependant aucune utilisation mathématique.

Que le procédé considéré, c'est-à-dire le procédé d'intégration des fonctions continues, ne s'applique pas à des classes assez vastes de fonctions discontinues pour être pratiquement utile, cela provient de ce qu'il fait essentiellement appel à la propriété de continuité. Si $f(x)$ est contiuue, il est bien certain que, si ξ_i doit varier dans un très petit intervalle (x_i, x_{i+1}), $f(\xi_i)$ variera peu, puisque c'est là la définition même

de la continuité, laquelle établit une sorte de solidarité entre les valeurs voisines de $f(x)$. Mais, dès qu'on abandonne l'hypothèse de la continuité, toute solidarité disparaît, et restreindre (x_i, x_{i+1}) n'entraîne pas nécessairement une restriction quant à la variation de $f(\xi_i)$; supposer le contraire, c'est admettre malgré tout un certain degré de continuité.

Nous voulons grouper les valeurs voisines de $f(x)$? Faisons-le. Pour cela, si les nombres $f(x)$ bornés, ont pour bornes extrêmes m et M, divisons l'intervalle (m, M) en intervalles partiels aussi petits que nous le voudrons, si (y_i, y_{i+1}) est l'un d'eux, nous grouperons donc toutes les valeurs de $f(x)$ telles que l'on ait, par exemple, $y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}$. Ces valeurs de $f(x)$, s'il en existe, ne correspondent en général plus à des valeurs de x formant un intervalle, mais à des valeurs de x formant un ensemble E_i, que j'ai désigné souvent par

$$E[y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}],$$

en utilisant une notation qui se comprend d'elle-même. A la place de la division de l'intervalle d'intégration (a, b) en intervalles partiels (x_i, x_{i+1}), nous avons une division en ensembles E_i; quand ξ_i varie dans E_i, $f(\xi_i)$ ne peut varier qu'entre y_i et y_{i+1}, donc au plus de $y_{i+1} - y_i$. Si donc nous savons attacher aux E_i des mesures $m(E_i)$, analogues aux mesures $m_i = x_{i+1} - x_i$ des intervalles, nous aurons une somme $S = \sum f(\xi_i) m(E_i)$ dont on démontrera qu'elle tend vers une limite par le raisonnement classique [**48, 8, 85**].

Le problème de la mesure des ensembles étant supposé résolu (voir plus loin), nous avons là un procédé d'intégration, applicable aux fonctions d'une ou de plusieurs variables, dont le principe est aussi clair et aussi simple que lorsqu'il s'agissait des seules fonctions continues. L'idée de ce procédé ne s'est pas présentée tout d'abord à mon esprit aussi nettement que je viens de le formuler; mais j'y ai bien été conduit par les simples remarques précédentes, associées à d'autres que j'ai précisées en donnant à la définition de l'intégrale deux autres formes. Lorsque $f(x)$ est une fonction continue, si l'on joint chaque point de coordonnées $x, y = f(x)$ à sa projection $x, y = 0$ par un segment de droite, ces droites couvrent des domaines; les uns, P, sont au-dessus de Ox; les autres, N, sont au-dessous. $m(P)$ et $m(N)$ désignent les aires de ces domaines, l'intégrale est

$$\int = m(P) - m(N). \tag{6}$$

Si $f(x)$ n'est plus continue, P et N sont des ensembles, et, par l'emploi des mesures de ces ensembles, on peut définir l'intégrale précisément par l'égalité (6); cette définition concorde avec la précédente [**8**]. La seconde définition exige plus d'explications.

On dit souvent que les définitions sont libres. Certes, pourtant aucun mathématicien ne consentirait à appeler intégrale un nombre ne jouissant pas de certaines propriétés particulièrement importantes et simples de l'intégrale des fonctions continues; énoncer ces propriétés c'est, si elles sont en nombre suffisant pour déterminer l'intégrale, donner une définition *descriptive* de l'intégrale. Il reste ensuite à l'utiliser pour obtenir un procédé de calcul, une définition *constructive* de l'intégrale. J'ai employé cette méthode non seulement pour l'intégrale, mais pour la mesure des ensembles et dans bien d'autres circonstances; elle m'a été suggérée par la lecture de la thèse de M. Drach et de l'Introduction à la théorie des nombres et à l'Algèbre supérieure qu'il a publiée en collaboration avec M. Borel, d'après des leçons de J. Tannery. Je tiens à dire ici toute l'influence que les idées de M. Drach ont eu sur les miennes. Postérieurement aux recherches de M. Drach, M. Hilbert a utilisé les définitions descriptives dans ses études sur les fondements de la géométrie.

Voici la définition descriptive que j'ai donnée [**85**] : *l'intégrale d'une fonction bornée $f(x)$, définie dans un intervalle fini (a, b), est un nombre fini $\int f(x)dx$, jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Quels que soient a, b, h, on a ;*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x+h)dx;$$

2° *Quels que soient a, b, c, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0;$$

3° *Quels que soient $f(x)$ et $\varphi(x)$, on a :*

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx;$$

4° *Si l'on a $f \geqslant 0$ et $b > a$, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0;$$

5° $$\int_0^1 1 \times dx = 1;$$

6° *Si $f_n(x)$ tend en croissant vers $f(x)$, l'intégrale de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$.*

Tandis que les deux définitions précédentes montraient que la nouvelle notion d'intégrale est naturelle, celle-ci montre qu'elle est nécessaire et non arbitraire. Des

conditions posées, la condition 6° est en effet la seule à laquelle on consentirait peut-être à renoncer. Encore, si l'on considère que dans les conditions indiquées, les intégrales de $f_n(x)$ tendent nécessairement vers une limite, on ne voit guère qu'il soit possible d'accepter que cette limite diffère de l'intégrale de $f(x)$.

Après mes travaux, bien des définitions équivalentes aux miennes ont été proposées; en particulier par MM. Borel, Egoroff, Lusin, F. Riesz, Weyl, W.-H. Young. L'une des définitions de M. Young, particulièrement intéressante parce qu'elle s'éloigne beaucoup des précédentes, utilise, comme beaucoup de travaux du même Auteur, la notion de suites monotones, c'est-à-dire de suites qui, comme celle des f_n considérée plus haut, sont constamment croissantes ou constamment décroissantes.

La mesure des ensembles. — Voici la définition descriptive de la mesure : *la mesure d'un ensemble* E *est un nombre* m(E) *positif ou nul satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *Deux ensembles égaux ont même mesure ;*

2° *Un ensemble* E *formé par la réunion d'ensemble* $E_1, E_2, \ldots\ldots$ *sans points communs deux à deux, a pour mesure la somme des mesures des ensembles composants ;*

3° *La mesure de l'ensemble des points* $0 < x < 1$ *(ou* $0 < x < 1$ *avec* $0 < y < 1$*, ou* $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$*, etc., suivant le nombre des dimensions) est égale à* 1.

Cette définition est celle qui se présente naturellement à l'esprit ; sans être énoncée, elle a été utilisée par Cantor et par Jordan. M. Borel l'a au contraire formulée. Antérieurement, M. Hadamard l'avait donnée explicitement pour le cas plus élémentaire où l'on considère seulement des polynômes ou des polyèdres : la mesure est alors l'aire ou le volume.

Avec le langage précédemment adopté, nous pouvons dire que la mesure est une fonction d'ensemble possédant la propriété d'additivité; mais il y a à cet égard une différence essentielle entre la signification donnée par M. Borel à la propriété 2° et celle que lui donnent les autres Auteurs. Tandis que ceux-ci n'avaient pensé qu'à l'additivité restreinte, c'est-à-dire au cas d'un nombre fini de E_i, M. Borel admet que les E_i peuvent être en infinité dénombrable : il astreint la mesure à posséder l'additivité complète.

La théorie actuelle de la mesure des ensembles a pour base la définition descriptive posée par M. Borel. Cela suffit pour que M. Borel soit le fondateur incontestable de cette théorie. Je l'ai rappelé autrefois [**23**], je l'ai redit récemment [**6**] en même temps que je précisais quel avait été mon rôle dans l'édification de la théorie complète; rôle qui m'a valu l'honneur de voir mon nom associé à celui de M. Borel dans la dénomination usitée généralement de « théorie de la mesure de Borel-Lebesgue ».

Partant de la définition descriptive de M. Borel, j'en ai déduit une définition constructive en procédant exactement comme le faisait Jordan, mais en considérant une infinité dénombrable de domaines là où il s'astreignait à n'en prendre qu'un nombre fini. S'il s'agit d'ensembles plans tous compris dans un carré C; pour mesurer un ensemble E, j'enferme E dans une infinité dénombrable de carrés et j'appelle mesure extérieure de E, $m_e(E)$, la borne inférieure de la somme des aires de ces carrés; j'obtiens de même $m_e(F)$, F étant formé par les points de C ne faisant pas partie de E. La mesure intérieure de E est $m_i(E) =$ aire de $C - m_e(F)$. Un ensemble E pour lequel $m_e(E) = m_i(E)$ est dit mesurable et la mesure de E est la valeur commune $m(E)$ de $m_e(E)$ et $m_i(E)$.

J'ai démontré que le nombre ainsi construit vérifie bien toutes les conditions du problème de la mesure : ce problème est donc possible pour les ensembles mesurables.

C'était là la première démonstration de la compatibilité des conditions imposées à la mesure par M. Borel. Revenant sur la question de la mesure en 1905, M. Borel renvoie à mes travaux pour la démonstration de cette compatibilité.

Au cours de ma démonstration, j'ai prouvé que si l'on prend l'ensemble des points appartenant à l'un au moins des ensembles mesurables donnés $E_1, E_2, \ldots\ldots$ (somme d'ensembles) ou l'ensemble des points appartenant à la fois à tous les ensembles mesurables, $E_1, E_2, \ldots\ldots$ (produit d'ensembles), on obtient un ensemble mesurable, que le nombre des E_i, soit fini ou dénombrable; et j'en ai conclu, dès ma première communication, que cette famille d'ensembles était si vaste qu'elle suffirait à l'intégration de toutes les fonctions de Baire, qu'elle comprenait tous les ensembles mesurables au sens de Jordan. Au contraire, voici ce que disait M. Borel des ensembles auxquels il avait appliqué sa définition, et que j'appelle les ensembles mesurables B. « On comparera avec fruit les définitions que nous allons donner avec les définitions plus générales que donne M. Jordan dans son Cours d'Analyse. Le problème que nous étudions ici est d'ailleurs tout différent de celui qu'a résolu M. Jordan. » Et encore : « En renonçant ainsi à définir la mesure pour un ensemble quelconque, on constitue une théorie moins générale, c'est-à-dire s'appliquant à des cas moins étendus, mais plus précise dans les cas où elle s'applique. »

Comme les ensembles mesurables B sont ceux qui s'obtiennent à partir des intervalles (dans le cas des ensembles linéaires seul considéré par M. Borel) à l'aide d'additions et de multiplications, ces ensembles sont mesurables par mon procédé et la compatibilité des conditions imposées à la mesure est démontrée pour eux.

Postérieurement [61], j'ai prouvé que la considération des ensembles mesurables B suffisait pratiquement, que, contrairement à ce que croyait M. Borel, tous les ensembles qu'on rencontre rentrent dans la catégorie de ceux qu'il nous avait appris à mesurer. Après mes travaux, M. Borel a pu appeler ensembles bien définis ceux

que j'appelle les ensembles mesurables B. J'ai été le premier à prouver logiquement la possibilité de mesurer les ensembles mesurables B et j'ai montré l'étendue et par suite l'importance de cette famille d'ensembles. De plus, j'ai étudié le problème de la mesure pour le cas du plan et des espaces à un nombre quelconque de dimensions en étendant toutes les notions introduites dans le cas de la droite, en particulier celle d'ensemble mesurable B.

On a aussi parfois associé mon nom à celui de M. Borel à l'occasion de ce théorème : si des intervalles couvrent tout (a, b), certains d'entre eux, en nombre fini, suffisent à couvrir (a, b). M. Borel n'avait énoncé son théorème que pour une famille dénombrable d'intervalles, je l'ai énoncé et prouvé saus cette restriction. J'ai dit ailleurs **[23]** que les démonstrations et les généralisations de ce théorème étaient faciles, que le seul progrés vraiment notable était d'avoir aperçu et énoncé ce théorème sous l'une de ses formes. Ce progrès est dû à M. Borel seul. Ensuite, M. Schœnfliess a eu le mérite de montrer que ce théoréme était la base géométrique des démonstrations de l'uniformité de la continuité et d'autres démonstrations d'uniformité. De ce fait, il donnait au théorème de M. Borel la même extension que je lui ai donnée un peu plus tard. Mon rôle, modeste, se réduit à avoir construit l'une des démonstrations du théorème général et à l'avoir étendu au cas de plusieurs dimensions.

Les ensembles de points ne sont pas les seuls pour lesquels on puisse se poser le probléme de la mesure; on peut aussi se proposer de mesurer des ensembles de droites, de plans, par exemple. En fait, de tels ensembles avaient été mesurés, surtout en vue de problémes de probabilités géométriques; mais on s'était borné aux ensembles qui sont les analogues des domaines simples; les mesures sont alors des intégrales qui sont caractérisées par le fait d'être invariantes par rapport au groupe des mouvements. M. Cartan a déterminé systématiquement ces invariants intégraux.

En exposant des résultats du géométre anglais Crofton **[69]**, j'ai montré comment l'on pouvait passer de la connaissance de la mesure pour ces ensembles spéciaux à la connaissance de la mesure dans le cas général. Le procédé est le même que lorsqu'il s'agit de passer de l'aire d'un domaine à la mesure d'un ensemble.

Les fonctions mesurables et les fonctions sommables. — Pour que la définition de l'intégrale s'applique à une fonction $f(x)$, il faut que, quels que soient a et b, l'ensemble soit mesurable. J'ai moutré qu'il suffisait que cette condition fût remplie par a et b rationnels et qu'elle était, dès lors, remplie toujours; on peut d'ailleurs remplacer la relation entre crochets par bien d'autres : $f(x) \leqslant a$; $f(x) = a$; $a < f(x) < b$; etc., on ne cessera pas d'avoir des ensembles mesurables. Les fonctions ayant ces propriétés sont dites *mesurables*. Toute fonction mesurable bornée a une intégrale.

Supposons $f(x)$ mesurable et non bornée, et prenons l'infinité des nombres y_i définis par $y_i = y_0 + i\varepsilon$, i étant un entier positif, négatif ou nul; formons

$$(7) \qquad \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} m\left\{E[y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}]\right\} f(\xi_i).$$

Il est immédiat que si, pour un choix de ε, de y_0 et des ξ_i, cette série est absolument convergente, elle le reste quel que soit ce choix et tend vers une limite déterminée quand ε tend vers zéro. Cette limite est appelée l'intégrale de $f(x)$ qui est dite *sommable*.

Toutes ces définitions s'étendent de suite au cas de plusieurs variables.

On voit que l'intégrale est maintenant définie pour des fonctions non bornées; quand une fonction f a une intégrale, $|f|$ a aussi une intégrale. Ce fait montre que, contrairement à ce qui se produit pour les fonctions bornées, l'intégration des fonctions sommables non bornées ne comprend pas tous les procédés d'intégration des fonctions non bornées considérés auparavant.

Avant de revenir aux fonctions bornées, je veux faire remarquer que si, dans la série (7), on ne conserve que des termes en nombre fini, ceux allant de $i = -n$ à $i = +m$, cela revient à ne faire varier $f(x)$ qu'entre deux nombres $-N$ et $+M$, et par suite à négliger les valeurs très grandes de $f(x)$. C'est exactement ce qu'avait fait M. de la Vallée Poussin pour le cas d'une fonction $f(x)$ ne devenant discontinue qu'en passant par l'infini; l'idée essentielle commune à cette méthode et à la définition de l'intégrale des fonctions sommables, c'est de laisser en quelque sorte la fonction à intégrer choisir elle-même les intervalles ou ensembles qui doivent servir à son intégration.

J'ai prouvé que *la somme, le produit, la limite de fonctions mesurables sont des fonctions mesurables;* dès lors, il est établi que toutes les fonctions de Baire sont mesurables, que toutes celles de ces fonctions qui sont bornées sont sommables. D'autre part, j'ai prouvé que toute fonction intégrable au sens de Riemann est sommable et qu'il y a accord entre les deux définitions de l'intégrale. Cela se voit de plusieurs façons; la plus suggestive consiste à remarquer que, puisque les deux premières définitions de l'intégrale que j'ai données font appel à la notion de mesure, laquelle a deux significations suivant qu'on exige l'additivité complète ou seulement l'additivité restreinte, il en résultera deux familles de fonctions intégrables. Dans le premier cas, avec la mesure de M. Borel, on a les fonctions sommables; dans le second, avec la mesure de Jordan, on a les fonctions intégrables au sens de Riemann, et cela, que l'on emploie l'une ou l'autre des deux définitions précitées.

Incidemment cela donne deux formes de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit intégrable au sens de Riemann; une troisième, obtenue indépendamment par M. Vitali et par moi-même, consiste en ceci : Il faut et il suffit

que les points de discontinuité de la fonction forment un ensemble de mesure nulle [85].

Pour toute fonction mesurable bornée, l'intégrale est comprise entre les intégrales par excès et par défaut de Darboux : j'ai prouvé qu'on pouvait toujours l'obtenir comme la limite de sommes $\sum f(P_i)\, m(D_i)$, pour un choix convenable des domaines partiels D_i et des points P_i. On peut faire le même choix pour le calcul simultané de plusieurs fonctions $f_1, f_2, \ldots$ [1]. Cette remarque est souvent commode. J'ai aussi [6, 7] comparé la famille des fonctions sommables avec la famille des fonctions intégrables par divers procédés.

Calcul de l'Intégrale. — De même que lorsqu'il s'agit des fonctions continues, le calcul d'une intégrale ne se fait à partir des définitions que dans des cas très particuliers et surtout à titre d'exemple. On est alors ramené à des calculs de mesure; au cours de mes diverses recherches, et dans mon livre sur l'Intégration, j'ai eu de nombreuses occasions de faire de tels calculs. Le plus souvent, dans les applications véritables, la fonction à intégrer est, lorsqu'il s'agit de fonctions discontinues, obtenue par des passages à la limite; ce qu'il est nécessaire d'avoir pour calculer l'intégrale, ce sont des théorèmes sur l'intégration des suites ou des séries. Avec la définition de Riemann, il y avait deux espèces de théorèmes : les uns permettaient d'affirmer que la fonction limite ou somme était intégrable, les autres permettaient l'intégration terme à terme. Qu'on se rappelle, par exemple, les travaux d'Arzelà et de M. Osgood. Avec la nouvelle définition, puisque toute fonction limite de fonctions mesurables est mesurable, il n'y a plus à s'occuper de théorèmes de la première espèce, du moins tant qu'il s'agit de fonctions bornées. De plus, la définition même de l'intégrale conduit à des énoncés de la seconde espèce très simples et d'un maniement commode. J'ai donné le premier de ces énoncés : *une suite convergente de fonctions sommables bornées dans leur ensemble est intégrable terme à terme* [8].

La simplicité et la portée de cette proposition, qui rend l'emploi de la nouvelle intégration pratiquement plus immédiat que celui de l'intégration classique, ont été signalées par bien des Auteurs. De nombreux mathématiciens ont reconnu que j'avais eu raison en affirmant que la nouvelle définition était un élément simplificateur. Après avoir rappelé mes recherches sur l'intégration et la dérivation, M. Picard écrit, dans son étude sur *les Sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle* : « Ces travaux ne sont pas restés sans applications, et les idées nouvelles ont montré leur fécondité entre les mains de Lebesgue et de ceux qui l'ont suivi. La théorie des séries de Fourier notamment s'est trouvée renouvelée. Loin de conduire à des complications nouvelles, l'emploi de l'intégration des fonctions sommables apporte d'heureuses simplifications. » Le théorème précédent est l'un de ceux qui conduisent souvent à ces simplifications.

Pour le cas des fonctions non bornées, j'ai donné cette proposition : *une suite convergente de fonctions sommables, toutes inférieures en module à une fonction sommable, a une limite sommable et est intégrable terme à terme* [**14**]. On en déduit ce cas particulier : *si des fonctions sommables f_n tendent en croissant vers une fonction f, la suite est intégrable terme à terme, quand f est sommable.* Cette proposition généralise la propriété 6° du problème de l'intégration; elle a été très heureusement complétée par M. B. Lévi. Cet auteur a observé que *si les intégrales des f_n ont une limite finie, f est sommable.*

Ces propositions reposent sur une propriété très simple d'une suite de fonctions mesurables f_n convergeant vers f : *l'ensemble des points en lesquels l'une des différences $|f-f_{n+p}|$ est supérieure à ε donné positif, a une mesure qui tend vers zéro, quand n croît* [**8, 49**]. Cette propriété a été le point de départ de recherches de M. Egoroff sur la nature des suites convergentes. On a remarqué aussi que cette propriété pouvait être vraie pour des suites telles que les f_n ne convergent pas partout vers f, et on l'a prise, ainsi que d'autres plus ou moins analogues, comme définitions de certaines catégories de suites qui ne sont pas vraiment convergentes mais qui, intégrées, donnent des suites convergentes; telle est la notion si importante de convergence en moyenne due à M. Fischer. Je ne puis quitter cette question de l'intégration des suites à laquelle se rapportent tant de Mémoires intéressants, sans citer au moins le nom de M. Vitali.

Tous les théorèmes servant, dans l'Analyse classique, au calcul des intégrales définies ont été prolongés, souvent sans modification aucune, au cas des fonctions sommables. Pour ne pas trop allonger ce paragraphe, je me bornerai à dire que, pour le cas d'une variable, l'intégration par parties et le premier théorème de la moyenne s'obtiennent sans aucune recherche, que j'ai étudié l'intégration par substitution qui a fait aussi l'objet de travaux de M. de la Vallée Poussin, que M. Hobson et moi avons, indépendamment, étendu le second théorème de la moyenne, que c'est surtout M. F. Riesz qui a utilisé, et sous des formes extrêmement généralisées, l'inégalité de Schwarz. Enfin, j'ai étendu [**5**] tous les modes de calcul qui résultent de ces propositions aux fonctions de plusieurs variables, y compris celui qui provient du second théorème de la moyenne lequel, à ma connaissance, n'avait jamais été appliqué qu'aux intégrales simples. M. Tonelli avait, pour le cas de plusieurs variables, utilisé une formule d'intégration par parties quelque peu différente de celle que j'ai établie ensuite.

Pour le calcul des intégrales multiples, il est nécessaire d'établir l'analogue de la formule classique :

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\left[\int f(x,y)\,dx\right]dy.$$

Une difficulté se présente : c'est qu'une fonction $f(x, y)$ mesurable ne donne pas

nécessairement naissance à des fonctions $f(x, y_0)$, pour y_0 constant, mesurables en tant que fonctions de x seul. D'où la nécessité de compliquer la formule. Cependant la formule subsiste si $f(x, y)$ est bornée et si tous les ensembles que l'on rencontre sont mesurables B, auquel cas je dis que $f(x, y)$ est mesurable B. Je l'ai établie, dés ma Thèse, dans cette hypothèse. M. Fubini l'a formulée sous la forme élégante et commode suivante : étant donnée une fonction sommable, il existe toujours une fonction mesurable B qui n'en diffère qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle et pour laquelle la formule précédente est vraie. M. Fubini a justifié cet énoncé pour toutes les fonctions sommables, bornées ou non. Sur ce sujet, il faut aussi citer des travaux fort intéressants de MM. Lichstenstein et de M. de la Vallée Poussin.

La formule établie est intéressante aussi au point de vue de la mesure des ensembles : elle permet d'évaluer les mesures superficielles à partir des mesures linéaires, comme lorsqu'il s'agit de l'aire des domaines.

Dérivation. Intégration indéfinie des fonctions discontinues.

La recherche des fonctions primitives. — La dérivée $f'(x)$ d'une fonction continue dérivable $f(x)$ est définie par l'égalité.

$$f'(x) = \text{lim., pour } h \text{ tendant vers zéro, de } \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$f'(x)$ est donc la limite d'une suite de fonctions continues; $f'(x)$ est mesurable. Si, de plus, $f'(x)$ est bornée, les fonctions continues du second membre sont bornées dans leur ensemble et l'on peut intégrer terme à terme la suite précédente; l'égalité qu'on obtient ainsi s'écrit :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)dx; \tag{8}$$

elle résout le problème de la recherche des fonctions primitives pour toutes les fonctions dérivées bornées. Bien que ce résultat dépasse extraordinairement, je puis le dire, ce qui avait été trouvé auparavant, il est obtenu plus simplement, d'un trait de plume, grâce au pouvoir simplificateur du théorème fondamental sur l'intégration des suites.

Après avoir obtenu ce résultat [**46, 8**], j'ai prouvé [**8**] *que l'égalité précédente était exacte dans tous les cas où $f'(x)$ est sommable.*

Comme, d'après un théorème de M. Baire, dans tout intervalle il en existe un

autre où la dérivée $f'(x)$ est bornée et par suite sommable, dans tout intervalle il en existe un autre où l'on connait $f(x)$ à une constante additive prés quand on se donne $f'(x)$. Mais, pour raccorder dans tous les cas les divers morceaux ainsi connus de la courbe $y = f(x)$, il a été nécessaire de recourir à une profonde analyse, qui est due tout entière à M. Arnaud Denjoy. Je suis fier de lui avoir, ainsi que M. Baire, fourni certains éléments essentiels de cette analyse. Pour moi, je m'étais borné à signaler deux cas où le raccordement est immédiat, celui où les points n'appartenant pas aux intervalles dans lesquels $f(x)$ est connue à une constante prés forment un ensemble réductible, et celui où ils forment un ensemble sur lequel $f'(x)$ est sommable. En examinant maintenant l'ensemble de mes recherches et en les comparant à celles de M. Denjoy, je puis dire que j'ai étudié les utilisations de l'intégrale des fonctions sommables, tandis que M. Denjoy, examinant un probléme (recherche des fonctions primitives ou recherche des séries trigonométriques), s'est proposé de le résoudre entièrement en créant un outil approprié. L'intégration des fonctions sommables est un outil puissant parce que simple et prêt à de multiples usages; les procédés d'intégration de M. Denjoy sont puissauts parce qu'exactement adaptés chacun à un but spécial; on rencontre ici la même différence qu'entre la sommation des séries absolument convergentes, si maniable, si facilement généralisable au cas des séries à plusieurs indices, et la sommation des séries semi-convergentes ou même divergentes pour lesquelles le procédé à employer doit varier avec le but à obtenir. En lisant attentivement ce Chapitre, le Lecteur reconnaîtra que, soit pour le cas d'une seule variable, soit pour le cas de plusieurs, il y a quantité de questions pour lesquelles la notion d'intégrale de fonction sommable ne suffit pas et dont la solution complète exigerait l'emploi des procédés de M. Denjoy ou de procédés trés analogues.

M. Lusin s'est aussi occupé de la recherche générale des fonctions primitives.

Du Bois Reymond et Dini ont généralisé la notion de dérivée par l'introduction des nombres dérivés; ainsi que divers autres Géomètres, tels que Scheeffer et M. Volterra, ils ont étudié le retour inverse d'un nombre dérivé à la fonction primitive. L'égalité (8) reste vraie si on remplace $f'(x)$ par un nombre dérivé borné ou non, mais partout fini et, de plus, sommable. Les nombres dérivés étant des fonctions mesurables [**8**, **75**, **5**], on a ainsi, en particulier, résolu le retour inverse dans le cas des nombres dérivés finis.

Dans un autre ordre d'idées plus élémentaires, je me suis occupé de déduire une définition de l'intégrale des fonctions continues de la notion de fonction primitive, ce qui serait conforme au mode de calcul ordinaire des intégrales. Seulement, dans les exposés ordinaires, il faut passer par l'intégrale pour démontrer l'existence de la fonction primitive. Dans certains cours, la notion d'intégrale définie ne sert qu'à cette démonstration. J'ai montré comment l'on pouvait très simplement prouver cette existence directement [**85**]; revenant sur la question [**22**], j'ai simplifié encore;

il suffit de s'appuyer sur le fait que la courbe $y=f(x)$ est la limite des polygones qui lui sont inscrits. On arrive ensuite à la notion d'intégrale définie en quelques mots.

Pour le calcul direct des fonctions primitives, sans l'intermédiaire de l'intégration, j'ai encore prouvé que le passage aux fonctions primitives peut se faire terme à terme pour une suite de fonctions dérivées f'_n tendant vers une fonction dérivée f' dans les deux cas suivants : la suite est uniformément convergente, ou la suite est croissante. Ces procédés permettent d'obtenir des fonctions primitives de fonctions discontinues ; on peut alors, grâce à la formule (8) prise comme définition, en déduire des intégrales. J'ai quelque peu étudié ce mode d'intégration, que j'ai nommé l'intégration au sens de Duhamel et Serret [**85**].

A l'occasion de ces recherches sur les fonctions primitives, j'ai donné des démonstrations nouvelles des propriétés, que j'ai parfois complétées, des dérivées et des nombres dérivés.

La dérivation des fonctions d'une variable et l'intégrale indéfinie des fonctions d'une variable. — Contrairement à ce que j'avais fait jusque-là comme conséquence des remarques développées à propos de l'intégration des fonctions continues, j'ai, dans le paragraphe précédent, traité spécialement des fonctions d'une variable; il en sera de même dans ce paragraphe et les termes intégrale indéfinie seront pris au sens classique de l'égalité (1').

Les résultats exposés conduisent à se poser la question suivante : *une fonction $f(x)$ ayant en tout point une dérivée finie ou un nombre dérivé fini, quand peut-on affirmer que cette dérivée ou ce nombre dérivé est sommable?* J'ai prouvé qu'il en était ainsi si $f(x)$ est à variation bornée et seulement dans ce cas [**8**]. Je rappelle que cela signifie que, pour toute division de l'intervalle considéré en morceaux (x_i, x_{i+1}), la somme $\sum |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ est inférieure à un nombre fixe.

L'examen approfondi de cette proposition m'a permis de prouver que : *toute intégrale indéfinie admet pour dérivée la fonction intégrée presque partout, c'est-à-dire exception faite au plus des points d'un ensemble de mesure nulle* [**85, 75, 76**]. De toutes les propositions auxquelles je suis arrivé, c'est certainement celle-ci qui s'est montrée la plus féconde. Elle m'a d'abord conduit à cet autre résultat : *toute fonction à variation bornée admet une dérivée presque partout, et cette dérivée est sommable.* En particulier, une fonction satisfaisant à la condition bien connue de Lipschitz admet presque partout une dérivée bornée; on s'explique ainsi que ces fonctions interviennent dans tant de questions. De très nombreuses conséquences en ont été déduites et maintenant, en dépit de l'existence de fonctions n'ayant de dérivée en aucun point, il est bien des questions dans lesquelles on parle sans crainte de la dérivée des fonctions très générales qu'on y rencontre. Parmi les géomètres qui ont donné de nou-

velles démonstrations des énoncés précédents, qui les ont précisés, complétés et généralisés dans des sens très divers, on peut citer M[me] et M. Young, MM. de la Vallée Poussin, B. Levi, Vitali, Denjoy, Montel, etc.

Toute intégrale indéfinie est continue et à variation bornée, mais la réciproque n'est pas vraie. Pour qu'une fonction soit une intégrale indéfinie, il faut que, de plus, la somme des valeurs absolues de ses accroissements dans des intervalles extérieurs les uns aux autres et de mesure ε, tende vers zéro avec ε. On dit alors, avec M. Vitali, qui a été le premier à publier une démonstration de cet énoncé que j'avais formulé [**85**], que la fonction est *absolument continue*.

Intégrale indéfinie comme fonction d'ensemble. — C'est aussi M. Vitali qui a publié, le premier, des résultats sur la dérivation des intégrales indéfinies des fonctions de plusieurs variables. Il adopte la formule (1) comme définition de l'intégrale indéfinie; la dérivée en x, y, s'obtient par la considération du rapport

$$\frac{f(x+h, y+h) + f(x, y) - f(x, y+h) - f(x, y+h)}{h^2}.$$

Le numérateur de ce rapport, qu'on doit considérer comme l'accroissement de $f(x, y)$ dans le carré de sommets opposés (x, y), $(x+h, y+h)$, sert à définir, comme dans le cas d'une variable, les fonctions à variation bornée et les fonctions absolument continues. Avec ces définitions, le théorème sur la dérivation des intégrales indéfinies et celui sur les fonctions absolument continues subsistent.

J'avais annoncé [**75, 76**] avoir pu généraliser les théorèmes du paragraphe précédent, grâce à un certain procédé de démonstration que j'ai appelé le procédé des chaînes d'intervalles, avant la publication de M. Vitali, mais je n'ai développé mes raisonnements que longtemps après cette publication [**5**] et je ne l'ai fait qu'en me servant d'un lemme géométrique sur les familles de domaines qui lui est dû. Ce lemme, qui n'est pas sans quelque analogie avec un théorème de M. Borel dont j'ai parlé plus haut, et que j'ai un peu étendu, m'a permis d'apporter de grandes simplifications à mon raisonnement primitif. Je tenais à bien rappeler la priorité de M. Vitali avant d'exposer la forme que j'ai donnée à mes résultats.

Une fonction sommable f étant donnée, nous pouvons convenir de ne la considérer que pour les points d'un ensemble mesurable donné E, alors la définition indiquée plus haut fait connaître l'intégrale de f dans E. Cette intégrale ainsi attachée à tout ensemble E est *l'intégrale indéfinie de* E, c'est une *fonction d'ensemble*. Comme cas particulier, on peut astreindre E à être un domaine, on a alors une *fonction de domaine* et, de là, on passe à une fonction des coordonnées comme on l'a vu pour les fonctions continues par l'intermédiaire de la valeur de la fonction dans un intervalle (c'est-à-dire dans un domaine de la forme $a < x < \alpha$, $b < y < \beta$, $c < z < \gamma$, s'il y a trois dimensions).

Ainsi, l'intégrale indéfinie peut être considérée comme fonction d'ensemble, de domaine, d'intervalle ou être exprimée à l'aide des coordonnées.

Cette fonction $\Phi(E)$ possède l'additivité complète. Elle est à variation bornée, c'est-à-dire que si E_1, E_2 ..... sont des ensembles sans points communs la somme $|\Phi(E_1)| + |\Phi(E_2)| + \ldots$ est inférieure à un nombre fixe. Elle est absolument continue, c'est-à-dire que la somme précédente tend vers zéro, quand la mesure de $E_1 + E_2 + \ldots$ tend vers zéro.

Pour pouvoir généraliser les énoncés précédents, il reste encore à définir la dérivée. Ici, une difficulté se présente : il semblerait que pour avoir la dérivée de $\Phi(E)$ en P, il n'y ait qu'à prendre la limite de $\frac{\Phi(E)}{m(E)}$, E étant un ensemble contenant P et de mesure tendant vers zéro; mais, avec cette définition, l'existence de la dérivée serait exceptionnelle. Pour avoir en général une valeur limite, donc une dérivée, j'ai assujetti les E à être pris dans ce que j'ai appelé une famille régulière d'ensembles, c'est-à-dire une famille d'ensembles tels que la mesure $m(S)$ du plus petit cercle (sphère ou hypersphère) S contenant E vérifie l'inégalité $m(E) > \mu . m(S)$; μ étant une constante positive.

Avec cette définition, tous les énoncés du paragraphe précédent se généralisent exactement.

Il est naturel de penser que les grandeurs de la physique sont absolument continues; dès lors, on admet que ces grandeurs sont bien, comme je l'ai annoncé, des intégrales indéfinies et que, par suite, elles sont susceptibles d'une opération de dérivation.

La dérivation est l'opération inverse de l'intégration; ceci demande toutefois une explication. Si deux fonctions sommables f et φ ne diffèrent qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle, leurs intégrales indéfinies F(E) et $\Phi(E)$ sont identiques. Lorsqu'on se donne une intégrale indéfinie, la fonction qui lui a donné naissance ne peut donc être considérée comme définie qu'en exceptant les points d'un ensemble de mesure nulle, d'ailleurs quelconque. En d'autres termes lorsque, par un procédé quelconque, on aura trouvé une fonction f, partout définie, dont F(E) est l'intégrale, en modifiant f arbitrairement aux points d'un ensemble arbitraire de mesure nulle on aura une autre fonction répondant aussi bien au problème que f. Ceci bien compris, on voit que la dérivation de F(E), qui donne un résultat déterminé en tout point, un ensemble de mesure nulle excepté, est bien l'opération inverse de la dérivation, aussi précise qu'il était possible de l'espérer; elle fera connaître f en certains points, on complétera ailleurs f arbitrairement et l'on modifiera encore f arbitrairement aux points d'un ensemble de mesure nulle. Dans toutes les questions d'intégration un ensemble de mesure nulle est négligeable, il n'a pas plus d'importance qu'un point dans l'intégration ordinaire; c'est pourquoi, ici et plus loin, nous rencontrerons des opérations n'ayant un sens que presque partout, c'est-à-dire un ensemble de mesure nulle étant excepté.

Je ne dirai que quelques mots des recherches assez longues auxquelles m'a conduit le développement de la théorie. Il y avait lieu d'étudier les fonctions à variation bornée non absolument continues; les questions à traiter sont assez nombreuses. On peut rechercher, par exemple, si, dans ce cas, il y a encore les mêmes relations entre les fonctions de point, de domaine et d'ensemble; cette question a été très heureusement traitée par M. Radon et surtout par M. de la Vallée Poussin. Pour moi, je me suis attaché à l'étude de la structure des fonctions à variation bornée; partant d'une fonction de point, à variation bornée, je l'ai décomposée en trois constituants nettement caractérisés; une fonction des sauts ou des discontinuités attachée à une infinité dénombrable de valeurs pour chaque variable; une fonction des singularités qui est attachée à un ensemble de mesure nulle et qui a une dérivée nulle presque partout; enfin une fonction absolument continue [**5**].

Voici d'ailleurs un résultat, non encore publié, qui précise la nature des fonctions les plus générales à variation bornée : par une transformation ponctuelle préalable, on peut toujours faire disparaître la fonction des singularités. Toute fonction à variation bornée et continue peut donc, grâce à une telle transformation, s'exprimer par une intégrale indéfinie.

On peut aussi étudier la dérivation partielle des intégrales indéfinies exprimées à l'aide des coordonnées; j'ai montré que, pour le cas de deux variables par exemple, les dérivées $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$, $F''_{xy}(x, y)$ existent presque partout et que la notion de différentielle totale peut aussi être utilisée presque partout. Pour démontrer l'existence de $F''_{xy}(x, y)$, j'avais dû modifier la définition ordinaire en disant que, pour le calcul de cette dérivée en un point, on ne tiendrait pas compte des points d'un certain ensemble de mesure nulle; MM. Tonelli et Fubini ont levé cette restriction.

Intégrale de Stieltjès. — Cette intégrale avait été inventée par Stieltjès pour la sommation de séries divergentes. Depuis, elle n'avait reçu aucune application vraiment nouvelle, quand M. F. Riesz, en 1909, montra qu'elle permettait la représentation de toutes les fonctionnelles linéaires. A cette occasion [**56**], j'ai donné le moyen de transformer une intégrale de Stieltjès $\int_a^b f(x)d[\alpha(x)]$ en une intégrale de fonction sommable. Le procédé est des plus simples; il repose sur l'idée utilisée dans le paragraphe précédent : une transformation ponctuelle convenable permet de simplifier la nature des fonctions à variation bornée et, par exemple, de les transformer en fonctions à nombre dérivés bornés, donc presque partout dérivables. Ici, par exemple, supposant $\alpha(x)$ continue, j'exprime x et $\alpha(x)$ en fonction de l'arc s de la courbe rectifiable $y = \alpha(x)$ comme je l'ai toujours fait dans la considération des courbes rectifiables [**85**], et ceci donne

$$\int_a^b f(x)d[\alpha(x)] = \int_{s_a}^{s_b} f[x(s)]\,\alpha'(s)ds\,;$$

quelques précautions supplémentaires permettent de traiter le cas de $\alpha(x)$ discontinue et d'obtenir dans tous les cas l'expression précédente avec une intégrale ordinaire dans le second membre.

Cette formule peut être prise comme définition des intégrales de Stieltjès portant sur les fonctions f, non continues mais sommables, et j'en ai déduit une extension des fonctionnelles linéaires à toutes les fonctions sommables.

En énonçant ces résultats, j'ai dit qu'il serait très difficile de les obtenir sans l'emploi du changement de variable qui m'a servi. Mon affirmation a vite été infirmée par les travaux, très beaux et très simples, de MM. W. H. Young, Radon et de la Vallée Poussin. Ces deux derniers Auteurs, se plaçant au point de vue des fonctions de domaine et d'ensemble, ont montré que l'on définit les intégrales de Stieltjès, quel que soit le nombre des variables, en remplaçant dans les définitions des intégrales de fonctions continues ou de fonctions sommables données plus haut la considération de la mesure par celle d'une autre fonction d'ensemble. M. W. H. Young avait utilisé d'une façon analogue une définition de l'intégrale qu'il a donnée.

Je viens de m'apercevoir que j'avais employé [**44, 87**] le procédé de MM. Radon et de la Vallée Poussin, dès ma Thèse, pour le cas particulier des intégrales $\int f(P)\,da$, où da est l'élément d'aire d'une surface, sans, bien entendu, en deviner la portée générale. J'indiquais en même temps un autre procédé qui, grâce à l'énoncé du paragraphe précédent, convient dans tous les cas; il généralise celui que j'ai employé pour les fonctions d'une variable. Comme lui, il repose sur l'emploi d'une transformation ponctuelle pour la simplification de la fonction par rapport à laquelle on intègre.

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS

Dans ce chapitre, j'ai réuni celles de mes recherches qui se rattachent à trois sujets différents, mais cependant assez intimement liés les uns aux autres : séries trigonométriques, approximation des fonctions continues, représentation des fonctions de Baire.

Séries trigonométriques.

Séries de Fourier. — On appelle série de Fourier d'une fonction $f(x)$ la série

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

dans laquelle on a :

$$\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix} dx.$$

Cette définition a une portée qui varie avec le sens donné au symbole d'intégration; pour faire une application de l'intégrale des fonctions sommables, j'ai étudié [**4, 51, 52, 65, 87**] les séries de Fourier qui en résultent. J'ai aussi considéré le cas où les intégrales seraient définies à l'aide des intégrales indéfinies, par l'emploi des formules (2') et (8), les points en lesquels la fonction $f(x)$ cesse d'être sommable formant un ensemble réductible; j'ai appelé les séries correspondantes des séries de Fourier généralisées, réservant le nom de séries de Fourier à celles qui sont relatives aux fonctions sommables.

Toutes les études qui ont porté sur les séries trigonométriques se groupent en deux catégories : recherches des séries trigonométriques propres à la représentation d'une fonction donnée; recherches sur la convergence ou la divergence des séries de Fourier et utilisation de ces séries. J'ai abordé ces deux ordres de problèmes.

Riemann, le premier, s'est demandé quelles étaient les séries propres à la représentation d'une fonction donnée; utilisant ses résultats, Dini, Ascoli et Du Bois-Reymond ont montré que, dans le cas des fonctions bornées intégrables au sens

de Riemann, ces séries étaient toutes des séries de Fourier. J'ai prouvé [4] qu'il en était encore de même pour les fonctions sommables bornées. J'ai étendu ce résultat aux fonctions qui ne deviennent infinies qu'en des points formant un ensemble réductible et qui, de plus, sont sommables; ou qui, n'étant pas sommables, possèdent du moins une série de Fourier généralisée; cette série est alors la seule série trigonométrique propre à les représenter. Dans tous les cas, la conclusion n'est pas changée si l'on renonce à la convergence de la série vers la fonction à représenter en des points formant un ensemble réductible. Cette dernière remarque n'est que le prolongement d'un théorème dû à Cantor; celui-là même en vue duquel Cantor a étudié la notion d'ensemble réductible.

Les résultats que je viens de rappeler ont été étendus par M. de la Vallée Poussin à toutes les fonctions sommables. M. Denjoy a ensuite résolu complètement le problème de la recherche des séries trigonométriques, partout convergentes, propres à la représentation d'une fonction, comme il avait résolu complètement le problème de la recherche des fonctions primitives.

On a aussi étudié ce que deviennent mes conclusions lorsque la condition de convergences de la série trigonométrique est remplacée par une condition moins restrictive. Voir, en particulier, des travaux de M. W. H. Young.

J'ai utilisé deux méthodes différentes pour étudier les fonctions sommables bornées; l'une d'elles repose sur une propriété intéressante par elle-même : si la partie réelle d'une série de Taylor converge sur le cercle de convergence et y reste comprise entre m et M, elle a aussi une somme comprise entre m et M à l'intérieur du cercle. C'est la généralisation d'une propriété bien connue des fonctions harmoniques.

Riemann a prouvé que les coefficients de Fourier a_n, b_n tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, pour toute fonction intégrable au sens de Riemann; j'ai montré que la propriété reste vraie pour toutes les fonctions sommables.

Pour le cas des fonctions bornées, j'ai, de plus [87], établi l'égalité dite de Parseval :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum(a_n^2 + b_n^2).$$

M. Fatou a prouvé que cette relation subsiste pour toutes les fonctions de carré sommable. M. F. Riesz et M. Fischer ont, indépendamment l'un de l'autre, démontré un théorème très important, sorte de réciproque de l'égalité de Parseval-Fatou. Des travaux de M. Young, relatifs aux fonctions telles que $f^q(x)$ soit sommable, prolongent encore ceux de MM. Riesz et Fischer.

J'ai été conduit à l'égalité de Parseval en étudiant les opérations que l'on peut effectuer sur les séries de Fourier; les seules opérations au sujet desquelles des questions se posaient réellement sont la multiplication et l'intégration. J'ai montré,

d'une part, que l'on peut multiplier les séries de Fourier de deux fonctions bornées en opérant comme dans le cas où elles ne comprennent qu'un nombre fini de termes; d'autre part, que l'on peut intégrer terme à terme une série de Fourier quelconque, la série obtenue est uniformément convergente. Ce dernier résultat généralise un énoncé de M. de la Vallée Poussin relatif aux fonctions intégrables par la méthode de Riemann.

Convergence des séries de Fourier. — L'étude de la convergence de ces séries s'impose d'autant plus que ce sont, d'après ce qui précède, les seules propres à la représentation des fonctions. Dans cette étude, on ne doit pas se restreindre à la classe des fonctions intégrables au sens de Riemann, car il existe des fonctions non intégrables de cette manière pour lesquelles la série de Fourier est partout convergente; je l'ai prouvé par un exemple [4]. Au reste, on n'obtiendrait aucune simplification en restreignant la classe des séries de Fourier envisagées.

L'idée qui m'a guidé dans l'étude de la convergence est la suivante : la différence entre la $m^{\text{ième}}$ somme d'une série de Fourier et la fonction $f(x)$ est :

$$(9) \qquad R_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2m+1)t \left[\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{\sin t}\right] dt;$$

c'est donc une intégrale tout à fait analogue aux intégrales a_n et b_n; même, dans certains cas, elle est effectivement une combinaison de telles intégrales. En général, elle est pourtant de nature plus compliquée, parce que, le plus souvent, la fonction entre crochets, que je désigne par $\psi(t)$, n'est pas sommable au voisinage de $t = 0$. C'est pour avoir des cas de convergence de R_m vers zéro [4] que j'ai étudié la convergence de a_n et b_n vers zéro, en généralisant un résultat de Riemann, comme je l'ai dit au paragraphe précédent. En comparant ce raisonnement de Riemann et ceux par lesquels Dirichlet et Lipschitz prouvent la convergence des séries de Fourier, raisonnements très différents en apparence, j'ai remarqué que tous ces Auteurs décomposaient l'intervalle d'intégration en des intervalles dans lesquels $\sin mt$ ou $\sin(2m+1)t$ conserve un signe constant, et que, l'intégrale à étudier devenant alors $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$, c'est le groupement des termes deux à deux $(u_0+u_1)+(u_2+u_3)+\dots$, qui fournit une valeur assez approchée pour que l'on puisse conclure. J'ai donc utilisé systématiquement ce groupement [65], et cela m'a conduit, en quelques lignes, à un énoncé qui comprend comme cas particulier tous ceux que l'on connaissait : *la série de Fourier de $f(x)$ converge au point x vers la fonction si l'intégrale de $|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|$, en tant que fonction de t, a une dérivée nulle pour $t = 0$, et si la quantité*

$$\int_0^{\alpha} |\psi(t+\delta)-\psi(t)|\, dt, \qquad (\pi > \alpha > 0, \quad \delta > 0)$$

tend vers zéro avec δ.

La première des deux conditions est remplie presque partout, notamment aux points de continuité et aux points que j'ai appelés réguliers, en lesquels $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et sont tels que l'on ait $f(x+0)+f(x-0)-2f(x)=0$. C'est donc la seconde condition qui est le véritable caractère de convergence ; on l'a depuis légèrement généralisée ; par exemple, en groupant, comme je l'avais indiqué, les termes u_i quatre à quatre, ou six à six, au lieu de les grouper deux à deux. Ce qui est surtout intéressant, c'est que l'on a réussi à obtenir des caractères de convergence à la fois pour une série de Fourier $f(x)$ et pour la série associée, c'est-à-dire pour celle qui correspond à la partie imaginaire de la fonction de variable complexe dont la partie réelle se réduit à $f(x)$ sur le cercle $z=e^{ix}$. C'est M. Fatou qui a commencé l'étude de ces séries associées ; les caractères de convergence les plus généraux sont dus à M. Young.

Pour montrer que l'énoncé que j'avais obtenu comprenait tous ceux qui avaient été formulés, j'ai dû commencer par classer les énoncés antérieurs, les réduisant à trois seuls réellement distincts, et bien effectivement distincts, comme je l'ai prouvé en construisant des exemples de fonctions satisfaisant à l'un d'entre eux et non aux deux autres. Pour déduire de l'énoncé général celui qui est dû à Dirichlet, je me sers de la propriété intermédiaire suivante : la série de Fourier $f(x)$ converge au point x vers la fonction, s'il est possible de trouver $\alpha>0$ tel que, quel que soit $t=0$ et contenu dans $(0, \alpha)$, $\psi(t)$ soit à variation bornée dans (t, α), sa variation totale $v(t)$ étant telle que $tv(t)$ tend vers zéro avec t.

Ces énoncés m'ont permis [**87**] de donner des exemples de séries de Fourier convergentes et possédant des points de discontinuité de natures très variées, et non pas seulement des points de discontinuité de première espèce, à la considération desquels on se borne généralement.

Divergence des séries de Fourier. — Du Bois-Reymond a, le premier, formé des exemples de fonctions continues dont les séries de Fourier sont divergentes en certains points. Des exemples généraux de Du Bois-Reymond, Schwarz a déduit un exemple plus simple. J'ai tout d'abord construit des exemples analogues, mais plus simples encore [**87**]. Je me suis ensuite proposé [**52, 87**] de rechercher la raison profonde de l'existence de ces séries divergentes qui n'apparaissaient jusque là que comme un bizarre résultat de calcul.

Les $n^{\text{ièmes}}$ sommes S_n des séries de Fourier des fonctions $f(x)$, au plus égal à M en valeur absolue, varient entre deux nombres $-M\rho(n)$ et $+M\rho(n)$; c'est l'étude des nombres $\rho(n)$, « les constantes de Lebesgue », comme les appelle M. Fejér, qui, entre autres conséquences, explique l'existence de séries de Fourier divergentes. Mieux on connaît la valeur, pour n très grand, de ces nombres $\rho(n)$, mieux on peut étudier la rapidité de la convergence ou la nature de la convergence ou de la divergence des séries de Fourier. Aussi a-t-on donné d'assez nombreux déve-

loppements exacts ou asymptotiques des constantes $\rho(n)$. Pour l'instant, il suffit de savoir que $\rho(n)$ grandit indéfiniment avec n et qu'il existe des fonctions continues, dont la série de Fourier converge uniformément, et pour lesquelles cependant, en certains points, $|S_n|$ diffère de $M\rho(n)$ d'aussi peu qu'on le veut.

Ceci étant, ayant pris une fonction f_1 de module au plus égal à 1, pour laquelle $|S_{n_1}|$ atteigne une valeur supérieure à 1, on prendra n_2 assez grand pour que $|S_{n_2}(f_1)|$ soit aussi petit que l'on veut et qu'il existe f_2 de module au plus égale a $\frac{1}{2}$ pour laquelle $|S_{n_2}(f_2)|$ surpasse 2 en certains points. On prendra ensuite n_3 assez grand pour que $|S_{n_3}(f_1+f_2)|$ soit aussi petit que l'on veut et qu'il existe f_3 de module au plus égal $\frac{1}{2^2}$ pour laquelle $|S_{n_3}(f_3)|$ surpasse 3, etc. Les sommes S_n pour la fonction continue $f_1+f_2+\ldots$ atteignent des valeurs supérieures à tout nombre donné; suivant le choix des f_i, la série de Fourier de f divergera ou convergera mais, en ce cas, non uniformément.

On rattache ainsi l'existence des séries divergentes à ce simple fait que le module maximum des S_n peut grandir indéfiniment avec n et, en même temps, on prouve l'existence de fonctions continues, dont la série de Fourier converge, mais non uniformément. Cette seconde singularité est fréquemment désignée sous le nom de « singularité de Lebesgue ». Elle a été étudiée depuis surtout par M. Fejér et par M. Steinhaus.

Le principal intérêt de cette façon d'examiner la convergence ou la divergence, c'est qu'elle s'applique immédiatement à d'autres séries; nous le verrons dans un instant.

Sommation des séries de Fourier. — Puisqu'il existe des séries de Fourier divergentes, il y avait lieu de rechercher un procédé de sommation qui permette de remonter de la série à la fonction. Cette question a été résolue par M. Fejér pour les fonctions continues. La solution qu'il en a donnée est aussi simple et aussi heureuse que possible, puisqu'il a prouvé qu'il suffisait de s'adresser au plus immédiat de tous les procédés de sommation des séries divergentes, à celui de Césaro, qui utilise les moyennes arithmétiques. Je me suis demandé si le même procédé ne réussirait pas pour toutes les séries de Fourier. J'ai démontré **[65]** que la première des deux conditions, qui figurent dans l'énoncé général de convergence du paragraphe précédent, suffit pour que les moyennes de Césaro convergent vers la fonction en général; le procédé de M. Fejér réussit donc presque partout, et. en particulier, aux points de continuité et aux points réguliers de la fonction.

Ce résultat résout le problème de la sommation des séries de Fourier aussi entièrement que possible; deux fonctions qui ne diffèrent qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle ont, en effet, la même série de Fourier; une telle série ne peut donc déterminer la fonction qui lui a donné naissance que tout au moins exception faite

des points d'un ensemble de mesure nulle. Cet ensemble exceptionnel est inévitable ici comme dans l'opération inverse de l'intégration ; mais on voit, qu'à cet ensemble exceptionnel près, une fonction est entièrement déterminée par sa série de Fourier. J'ai démontré aussi ce fait d'une autre manière grâce à un artifice qui a été souvent imité depuis. J'ai déduit de là une méthode très élémentaire pour l'étude des séries de Fourier dans des cas simples, mais déjà pratiquement fort étendus [**87**, chapitre II] ; cette méthode n'est pas sans analogie avec celle que M. Kneser publiait au même moment et qui lui permit l'étude de divers développements de la physique mathématique.

Le procédé de M. Fejér n'est pas le seul qui résolve la question. Nous avons vu qu'en intégrant terme à terme la série de Fourier d'une fonction f, on obtient une série uniformément convergente représentant la fonction primitive F de f ; or, connaissant F, on en déduit f comme limite du rapport $\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$. Si, au lieu d'intégrer une seule fois la série de Fourier de f, on l'intégrait deux fois, on arriverait au procédé de sommation considéré par Riemann pour un but différent de celui dont il s'agit ici [**87**].

Tous ces procédés fournissent f presque partout, et, en particulier, aux points réguliers ; tous donnent pour f des développements qui sont uniformément convergents à l'intérieur de tout intervalle où f est continue.

Il existe un autre procédé qui possède les mêmes avantages, c'est celui qui résulte de l'emploi de la formule de Poisson et qui a été si complètement étudié par M. Fatou dans sa Thèse. Il est à remarquer que ce procédé est le premier en date, car c'est en tant que procédé de sommation des séries de Fourier que Poisson a établi la formule qui porte son nom.

Intégrales singulières. — Les résultats précédents peuvent être généralisés, comme les résultats classiques, pour les développements qu'on déduit de la considération des intégrales singulières. J'ai été guidé par la comparaison de celles des démonstrations du célèbre théorème de Weierstrass qui permettent d'écrire effectivement une suite de Fourier ou un polynôme approché d'une fonction continue donnée : celle de Weierstrass, basée sur l'emploi d'une intégrale déjà rencontrée par Laplace dans les questions d'approximation de grands nombres et par Fourier dans la théorie de la chaleur ; celle de M. Picard, basée sur l'intégrale de Poisson ; celle de M. Fejér et celle, alors toute récente, de M. Landau. Toutes ces démonstrations utilisent une intégrale singulière $\int_0^l \varphi(t-x, n) f(t)\, dt$ qui converge uniformément vers f, sous la condition que f soit continue, et qui, par suite, diffère considérablement de celles qu'on utilise généralement pour la généralisation des séries de Fourier. Voici la principale différence : dans le cas actuel, le noyau φ est positif ; on fait l'étude de l'intégrale grâce au premier théorème de la moyenne, ce qui four-

nit une évaluation dès que l'on connaît le module M de $f(x)$. Cette évaluation est de la forme $M\rho_1(n)$, les nombres $\rho_1(n)$ restant bornés, quel que soit n.

Dans les cas analogues à celui des séries de Fourier, φ n'a pas un signe constant; son étude se fait grâce au second théorème de la moyenne, dû à Ossian Bonnet, qui, sous l'hypothèse que $f(x)$ soit à variation bornée, donne l'évaluation, permettant de conclure à la convergence du développement étudié, en fonction de la variation totale de f. L'emploi du premier théorème de la moyenne aurait donné $M\rho(n)$ avec des nombres $\rho(n)$ grandissant indéfiniment avec f.

Il y a donc deux catégories d'intégrales singulières à étudier : celles à noyau positif, justiciables du premier théorème de la moyenne et celles qui relèvent du second théorème, que l'on étudie seules ordinairement. Je dois dire cependant que le cas des intégrales du premier type avait été signalé par U. Dini; mais le théorème qu'il avait donné était resté sans application.

La courte Note [74] dans laquelle j'ai fait ces remarques a suscité plusieurs travaux. M. Hobson a cherché des conditions suffisantes pour l'existence de certains développements; M. Haar a obtenu des conditions pour que des développements en série de fonctions orthogonales soient tous convergents ou pour qu'il en existe de divergents.

J'ai développé mes propres travaux dans un Mémoire assez volumineux [1]; *je me suis proposé la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale* $\int_0^l \varphi(t-x, n) f(t) dt$, *dans laquelle* $\varphi(\alpha, n)$ *est donnée, tende vers* $f(x)$ *en tous les points de continuité de* $f(x)$, et cela pour chacune des cinq classes de fonctions suivantes : 1° classe des fonctions sommables; 2° classe des fonctions de carré sommable; 3° classe des fonctions bornées et sommables; 4° classe des fonctions n'ayant que des points de discontinuité de première espèce; 5° classe des fonctions à variation bornée.

Les conditions obtenuea, bien que relativement simples et maniables, ne peuvent être reproduites ici. D'après ce que j'ai dit sur la parenté des problèmes consistant à étudier la convergence vers zéro du $n^{\text{ième}}$ reste d'une série de Fourier et celle des $n^{\text{ièmes}}$ coefficients d'une telle série, on ne sera pas étonné que les conditions définitives dérivent de celles sous lesquelles les intégrales précédentes tendraient vers zéro.

Pourvu que les conditions requises soient remplies uniformément, la convergence vers $f(x)$ est uniforme à l'intérieur de tout intervalle de continuité. Si ce sont seulement les conditions relatives à la 5° classe considérée qui sont remplies, il existe des fonctions f continues pour lesquelles le développement trouvé est divergent; il en existe aussi pour lesquelles le développement converge, mais non uniformément.

Moyennant quelques conditions supplémentaires, peu restrictives pratiquement, les noyaux qui conviennent aux trois premières classes de fonctions fournissent des développements qui convergent presque partout. C'est la propriété précédemment

énoncée pour l'intégrale de M. Fejér, que M. Fatou a prouvée pour l'intégrale de Poisson et M. F. Riesz pour l'intégrale de M. Landau.

Toutes les propositions obtenues dans le cas des séries de Fourier se généralisent donc et par suite se comprennent mieux.

A l'occasion de ces recherches, j'ai été conduit [2] à reconstituer ce que je crois être le raisonnement par lequel Stieltjès démontrait, en le précisant, le théorème de Laplace sur l'approximation des fonctions de grands nombres, théorème qui a joué un si grand rôle dans les recherches de Darboux.

Représentation des fonctions continues.

Le théorème de Weierstrass. — Le premier travail que j'ai publié [19] était consacré surtout à la démonstration de ce théorème de Weierstrass : une fonction continue peut être représentée par un polynôme avec telle approximation que l'on veut.

Les démonstrations que l'on en possédait alors, bien que très simples, m'avaient paru plus savantes que ne l'exigeait la nature élémentaire des notions intervenant dans l'énoncé de Weierstrass. Guidé par le désir de toujours voir simplement les choses simples, j'ai analysé ainsi la question : la fonction $f(x)$ à représenter est approchée d'aussi près que l'on veut par la fonction $\varphi(x)$ telle que la courbe $y = \varphi(x)$ soit un polygone inscrit dans la courbe $y = f(x)$. Il suffit donc de s'occuper de ces fonctions $\varphi(x)$. Jusque-là, je raisonnais comme l'avaient fait, à mon insu, M. Lerch et M. Volterra; mais les suites de nos raisonnements diffèrent beaucoup.

Une telle fonction $\varphi(x)$ peut être considérée comme la somme de fonctions continues représentées chacune par les deux côtés d'un angle; la plus simple de ces fonctions est $|x|$, et il suffit de savoir représenter celle-ci pour en déduire la représentation de toutes. Or, posant $u = 1 - x^2$, nous avons

$$|x| = +\sqrt{x^2} = +\sqrt{1-u};$$

et la formule du binôme donne le développement de $|x|$ en série entière en u, donc en série de polynômes en x. La démonstration est faite.

Voici d'ailleurs comment j'avais été conduit à cet artifice analytique : une courbe formée par deux demi-droites est la position limite de certaines branches d'hyperboles; de sorte que, pour représenter de façon approchée $|x|$, par exemple, il suffira de représenter approximativement la branche d'hyperbole $y = +\sqrt{a^2 + x^2}$, a étant très petit. Or y, considérée comme fonction de x^2, n'a que $-a^2$ pour point singulier, et, comme il s'agit de représenter y pour des valeurs de x^2 positives et nulles, il

suffira de prendre un développement de Taylor autour, par exemple, du point $x^2 = 1$; le développement procède alors suivant les puissances de $1 - x^2$ et il est valable pour $-a^2 < x^2 < 2 + a^2$.

Pour étendre le théorème de Weierstrass aux fonctions de plusieurs variables, j'ai utilisé un procédé qui, depuis, s'est révélé fort commode. Soit à représenter $f(x, y)$; prenons les points $x = ma$, $y = nb$, a et b étant deux constantes et m et n tous les entiers possibles. Ces points sont les sommets d'un réseau formé de carrés; soit l'un de ces carrés : celui de sommets opposés (o, o), (a, b), par exemple. Il existe une fonction $z = Axy + Bx + Cy + D$, et une seule, égale à $f(x, y)$ aux quatre sommets du carré; elle est représentée pour les points du carré par un morceau de paraboloïde hyperbolique. Ces morceaux de paraboloïde forment une surface $z = \varphi(x, y)$, et $\varphi(x, y)$ est une fonction approchée de $f(x, y)$ exactement comme précédemment $\varphi(x)$ était approchée de $f(x)$. Or $\varphi(x, y)$ est une somme de fonctions dont les plus simples sont $|xy|$, $x|y|$, $|x|y$, et nous savons représenter ces fonctions de façon approchée par des polynômes.

Pour le cas d'une variable ma démonstration a été souvent reproduite; M. Goursat m'a fait l'honneur de l'introduire dans son cours d'Analyse mathématique. M. Potron et M. S. Bernstein se sont servis de l'idée de considérer $|x|$ comme l'élément constituant de toutes les fonctions continues, pour établir des formules d'interpolation qui permettent l'approximation indéfinie, en utilisant un procédé donné par M. Borel. M. de la Vallée Poussin, et surtout M. Serge Bernstein, se sont servis de la même idée pour arriver à des résultats très précis et très cachés concernant la meilleure approximation avec laquelle les polynômes d'un degré donné peuvent représenter les fonctions continues d'un type donné.

Dans cet ordre de recherches, dont il va être question plus loin, on a beaucoup fait usage d'un artifice que j'ai donné pour passer d'une représentation approchée d'une fonction faite à l'aide de polynômes à une représentation par des suites trigonométriques finies. Convenablement perfectionné par M. Dunham Jackson et par M. de la Vallée Poussin et associé à un artifice dû à M. S. Bernstein, et qui permet le passage inverse, il prouve l'identité des problèmes que posent ces deux modes de représentation. J'avais employé cet artifice pour déduire, du théorème énoncé de Weierstrass, un autre théorème du même Auteur affirmant la possibilité de représenter toute fonction continue par une suite de Fourier de façon aussi approchée qu'on le désire [**19**]. M. Picard avait démontré ce théorème par l'emploi de la formule de Poisson.

Représentation des fonctions de deux variables réelles à l'aide des polynômes en $z = x + iy$. — Dans une conversation à laquelle j'assistais, MM. Borel et Painlevé n'étaient pas d'accord sur l'existence possible de certaines séries de polynômes en $z = x + iy$. Je leur affirmais que, non seulement de telles séries existaient,

mais que la puissance de représentation de ces séries allait bien au delà de ce qu'ils envisageaient. A cette occasion, j'ai démontré [**21**] que toute fonction continue de x et de y peut être représentée par une série uniformément convergente de séries de polynômes en z. Ce résultat était assez inattendu pour que M. Lerch l'ait cru faux et ait, à cette occasion, envoyé un article au *Bulletin des Sciences mathématiques*. Pourtant, comme je l'ai fait observer, certaines formules étranges, dues à Seidel, convenablement interprétées, fournissaient un résultat à peu près équivalent.

Des études générales sur les séries convergentes de polynômes en z, faites par M. Osgood et par M. Montel, il résulte d'ailleurs que les développements que j'ai trouvés sont les plus simples possibles; les séries doubles qui y figurent ne peuvent pas être remplacées par des séries simples.

Ordre de l'approximation d'une fonction continue par un polynôme ou une suite finie de Fourier. — M. Landau a fait connaître une intégrale singulière particulièrement propre à la démonstration du théorème de Weierstrass, parce que sa valeur est toujours un polynôme. A cette occasion [**74**], j'ai attiré l'attention sur le problème suivant : On sait, depuis Weierstrass, que toute fonction continue peut être représentée de façon approchée par des polynômes; il conviendrait de fixer l'ordre de l'approximation possible avec des polynômes de degré donné n, quand on sait, par exemple, que $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz

$$|f(x+h)-f(x)|<\lambda|h|. \tag{10}$$

M. de la Vallée Poussin s'était posé de son côté la même question : peu après ma Note, il a commencé la série des publications fondamentales qu'il a données sur ce sujet.

J'ai précisé ensuite la question [**1**], en montrant qu'il était nécessaire de connaître quelque chose sur la variation de $f(x)$; que si l'on ne connaissait, par exemple, que le module maximum M de $f(x)$, le problème n'aurait pas de sens. Dans ce cas, en effet, quel que soit le degré choisi m, on pourra trouver une fonction continue $f(x)$ différant de tous les polynômes de degré m de plus de $\mathrm{M}-\varepsilon$, quelque petit qu'ait été choisi ε. On peut dire plus : Pour chaque fonction $f(x)$, la meilleure approximation $\varepsilon_m[f(x)]$ obtenue avec des polynômes de degré m tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$; mais son ordre infinitésimal ne peut être fixé.

J'ai beaucoup insisté sur la différence essentielle entre les deux aspects de la question que je viens d'envisager : Considérons, par exemple, les fonctions satisfaisant à l'inégalité (10), elles constituent ce que j'appelle la classe C^1. Si $f(x)$ est une fonction de cette classe et si on considère le polynôme de degré m qui la repré-

sente le mieux, le polynôme de Tchebycheff, le maximum de la valeur absolue de la différence entre $f(x)$ et le polynôme est la meilleure approximation $\varepsilon_m{}^{\text{I}}[f(x)]$. Si maintenant on prend successivement pour $f(x)$ toutes les fonctions de C^{I}, le maximum $\varepsilon_m{}^{\text{I}}$ des $\varepsilon_m{}^{\text{I}}[f(x)]$, dont la détermination dépend d'un problème du calcul des variations, est le seul nombre que l'on puisse attacher à la classe C^{I}. Il n'est nullement évident que l'ordre infinitésimal de chacun des $\varepsilon_m{}^{\text{I}}[f(x)]$, en tant que fonction de $\frac{1}{m}$, ne soit pas supérieur à celui de $\varepsilon_m{}^{\text{I}}$. On verra qu'il en est parfois ainsi pour certaines classes de fonctions.

Les mêmes questions peuvent être posées pour l'approximation des fonctions continues de période 2π par des suites de Fourier d'ordre m : grâce à M. S. Bernstein et à M. de la Vallée Poussin, nous savons maintenant qu'il y a pour ainsi dire identité entre ce problème et le précédent; au moment où je travaillais ces questions, on savait simplement que les deux problèmes étaient très voisins et très intimement liés. C'est du second que je me suis occupé [**15**]; les résultats que j'ai obtenus ont pu être utilisés depuis pour l'un ou l'autre des deux problèmes.

J'ai étudié les fonctions de la classe C : $f(x) \leqslant \text{M}$; de la classe C^{I} précédemment définie; de la classe C^{II} définie par la condition de Lipschitz généralisée :

(11) $$|f(x+h) - f(x)| < \lambda h^{\alpha}; \qquad (0 < \alpha < 1);$$

de la classe C^{III} définie par la condition de Lipschitz-Dini :

(12) $$\text{Lim}_{h=0} \left\{ [f(x+h) - f(x)] |\log h| \right\} = 0 ;$$

de la classe C^{IV}, définie par la condition :

(13) $$|f(x+h) - f(x)| < \varphi(\delta),$$

$\varphi(\delta)$ étant une fonction dont la principale propriété est que $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ n'est pas croissant. Toutes ces fonctions sont supposées continues et de période 2π.

Pour ces fonctions, j'ai étudié l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier : $\alpha_m[f(x)]$ et α_m ; l'ordre de grandeur du $m^{\text{ième}}$ reste de la série de Fourier : $\text{R}_m[f(x)]$ et R_m ; l'ordre de grandeur de la meilleure approximation par des suites de Fourier d'ordre m : $\varepsilon_m[f(x)]$ et ε_m.

Les deux premières questions sont bien liées puisque, je l'ai dit, l'étude du reste de la série de Fourier est comparable à celle des coefficients de Fourier a_m et b_m ; on verra dans un instant comment on peut passer de là à la dernière question. Pour les deux premières, voici les résultats : La classe C^{IV} contenant C^{I} et C^{II}, il suffit de les énoncer pour C, C^{III} et C^{IV} ; on a :

$$\alpha_m = \frac{4\text{M}}{\pi}, \qquad \alpha_m{}^{\text{III}} = \infty, \qquad \alpha_m{}^{\text{IV}} = \text{K}\varphi\left(\frac{\pi}{m}\right);$$

dans ces formules, K désigne une constante numérique. Pour les $\alpha_m[f(x)]$ on ne peut définir, en fonction de $\left(\frac{1}{m}\right)$, un ordre infinitésimal, le même pour toutes les fonctions de la classe envisagée, meilleur que celui résultant de l'expression de α_m; sauf pourtant pour C^{III} : l'ordre des $\alpha_m^{III}[f(x)]$ est au moins celui de $\frac{1}{\log m}$. J'ai prouvé que

$$R_m = M\varphi(m), \qquad R_m^{III} = \infty, \qquad R_m^{IV} = K \log m \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{m}\right);$$

$\varphi(m)$ désigne le nombre défini page 48.

On ne peut, pour toutes les fonctions de l'une des classes considérées, fixer un meilleur ordre infinitésimal pour les $R_m[f(x)]$. Ces résultats résultent de l'emploi du raisonnement de Lipschitz pour l'étude des séries de Fourier; ce raisonnement, qui se prête au calcul numérique, est en ce sens bien plus utile pratiquement que celui de Dirichlet, ainsi que l'avait déjà fait remarquer M. Phragmén.

Voici maintenant comment on passe de ces deux problèmes, en quelque sorte préliminaires, au troisième. Soit trouvée la suite de Fourier d'ordre m, $s(x)$, représentant au mieux $f(x)$; la différence $d(x) = f(x) - s(x)$ entre $f(x)$ et cette suite sera, par définition même, au plus égale en module à $\varepsilon_m[f(x)]$; donc, le $m^{\text{ième}}$ reste de la série de Fourier de $d(x)$ est au plus égal en module à $\varphi(m)\,\varepsilon_m[f(x)]$. Or ce $m^{\text{ième}}$ reste est aussi celui de la série de Fourier de $f(x)$, et par suite on a :

$$R_m[f(x)] \leqslant \varphi(m)\varepsilon_m[f(x)], \qquad \text{donc} \qquad \varepsilon_m[f(x)] \geqslant \frac{R_m[f(x)]}{\varphi(m)};$$

ainsi, on a une limite inférieure de $\varepsilon_m[f(x)]$ dont $R_m[f(x)]$ est d'ailleurs une limite supérieure.

Or, $\varphi(m)$ est de l'ordre de $\log m$, donc l'ordre de $\varepsilon_m[f(x)]$ est compris entre celui de $R_m[f(x)]$ et celui de $\frac{R_m[f(x)]}{\log m}$. De sorte que la meilleure limite de cet ordre que l'on puisse fixer pour toutes les fonctions de la classe C^{IV}, par exemple, est comprise entre les ordres de $\varphi\left(\frac{\pi}{m}\right)$ et de $\log m . \varphi\left(\frac{\pi}{m}\right)$.

Pour la classe C^{III}, comme on sait seulement que $R_m[f(x)]$ tend vers zéro, on en peut conclure que le meilleur ordre commun à tous les $\varepsilon_m[f(x)]$ ne saurait être supérieur à celui de $\frac{1}{\log m}$. Or, par l'emploi d'une intégrale construite par M. de la Vallée Poussin, j'ai trouvé, pour toutes les fonctions de C^{III}, une approximation d'ordre au moins égal à $\frac{1}{\log m}$, donc *le meilleur ordre possible pour toutes les fonctions de* C^{III} *est exactement celui de* $\frac{1}{\log m}$. C'est le premier résultat de cette nature qui ait été obtenu; depuis, les familles pour lesquelles on sait fixer l'ordre d'approxi-

mation sont nombreuses; on sait même établir qu'inversement une fonction appartient à une certaine famille dès qu'elle est susceptible d'une approximation d'un ordre donné. Au cours de ces recherches, dues à MM. Dunham Jackson, Serge Bernstein, de la Vallée Poussin, Paul Montel, on a souvent fait usage de la méthode que je viens de rappeler et qui permet d'obtenir deux limites de l'ordre d'approximation.

Incidemment, j'ai obtenu une nouvelle démonstration de la convergence des séries de Fourier des fonctions de C''' et la preuve que la condition (12) ne saurait être remplacée par une condition de convergence, relative à l'ordre de $|f(x+h)-f(x)|$, qui soit moins restrictive.

Représentation des fonctions de Baire.

Les fonctions de classe un. — Les représentations de fonctions discontinues, dont il a été question dans ce Chapitre, n'étaient valables qu'exception faite des points d'un ensemble de mesure nulle; de sorte qu'on représentait en réalité, non pas une fonction donnée $f(x)$, mais toutes les fonctions équivalentes à $f(x)$ au point de vue de l'intégration. Celles dont je vais m'occuper maintenant sont des représentations au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire valables pour toutes les valeurs de la variable.

M. Baire appelle fonctions de classe zéro, les fonctions continues; les fonctions de classe un sont les fonctions discontinues qui sont limites de fonctions continues; par fonctions de classe n, il désigne toutes les fonctions qui n'appartiennent pas aux classes inférieures à n et qui sont pourtant limites de suites de fonctions appartenant à ces classes. Pour que cette classification ait tout son effet, il faut admettre que n peut être un nombre transfini.

M. Baire a prouvé que, pour qu'une fonction soit de classe un, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait; c'est-à-dire qu'elle admette nécessairement des points de continuité quand on ne la considère qu'aux points d'un ensemble parfait, d'ailleurs quelconque. Dans sa Thèse, M. Baire avait démontré l'énoncé précédent pour les fonctions d'une variable et il déclarait ne pas savoir s'il était encore exact dans le cas de plusieurs variables. Au lendemain de sa Thèse, j'ai montré que l'énoncé de M. Baire était général; ce fut l'objet de la première Note que j'ai présentée aux Comptes Rendus [41]; peu de temps après, M. Baire simplifia et modifia sa démonstration primitive, ce qui la rendit applicable au cas général.

Le procédé que j'ai employé repose essentiellement sur l'emploi des courbes, telles que celles de Peano et d'Hilbert, qui remplissent tout un domaine. Pour qu'une fonction soit de classe un, dans un carré par exemple, il faut et il suffit qu'elle soit de classe un au plus sur toute courbe du carré et effectivement de classe un sur l'une

d'elles; il suffit d'ailleurs de considérer la seule courbe de Peano remplissant ce carré. Le même énoncé est vrai pour une classe quelconque; je n'ai développé la démonstration [61] qu'en la rattachant aux recherches que j'exposerai au paragraphe suivant.

Je me suis demandé si, au lieu d'utiliser toutes les courbes, ou d'utiliser des courbes aussi compliquées que la courbe de Peano, on ne pourrait pas ne considérer que des courbes assez simples. Ce problème, que M. Sierpinski a repris récemment, m'a conduit à des résultats inattendus : il existe des fonctions continues sur toute courbe analytique, et pourtant discontinues dans tout domaine; elles sont représentables par des séries de polynômes, naturellement non uniformément convergentes dans tout domaine si petit qu'il soit, et qui, pourtant, convergent uniformément sur toute courbe analytique.

La démonstration de M. Baire utilisait les nombres transfinis; j'ai dit [61] que, de cet emploi, résultait un avantage; que la démonstration même donne, en quelque sorte, un procédé opératoire régulier pour reconnaître si une fonction est ou non de classe un et, dans l'affirmative, pour obtenir sa représentation en série de polynômes. Pourtant, il y avait intérêt à justifier un énoncé, qui ne suppose pas la notion de nombre transfini, sans utiliser cette notion; c'est ce que j'ai fait [86], grâce surtout à des procédés de raisonnements dus à M. Baire lui-même et en utilisant ce que j'appelle des fonctions de classe un en un point, ou des fonctions de classe un à ε près en un point, ou sur un ensemble. Ces fonctions sont définies par analogie avec celles que l'on appelle des fonctions continues en un point ou continues à ε près. En même temps, je donnais une autre forme à la condition nécessaire et suffisante : *Pour qu'une fonction f soit de classe un au plus, il faut et il suffit que le domaine où elle est définie puisse, quel que soit $\varepsilon > 0$, être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est continue à moins de ε près.*

Après avoir justifié cet énoncé pour le cas d'une seule variable [86], je l'ai démontré dans le cas général [11]. J'ai fait voir qu'il était d'un emploi facile en l'appliquant : *a*) aux fonctions semi-continues, dont la définition est due à M. Baire; *b*) aux fonctions n'ayant qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité; *c*) aux fonctions $f(x, y)$ continues séparément par rapport aux deux variables dont elles dépendent; toutes ces fonctions sont de classe un.

J'avais déjà donné une démonstration très simple relative aux cas *b*) et *c*) dans mon premier travail [19]. M. Borel a inséré dans ses Leçons sur les fonctions de variables réelles, une autre démonstration relative au cas *b*) que je lui avais communiquée.

L'examen du cas *c*) était tout indiqué, car M. Baire avait étudié simultanément les fonctions d'une variable qui sont de classe un et les fonctions d'une variable déduites des fonctions relatives à ce cas *c*). J'ai montré [19] qu'une fonction de n variables,

continue par rapport à chacune d'elles est au plus de classe $n-1$. Généralisant un résultat de M. Volterra relatif aux fonctions de classe un, j'ai prouvé [61] que toute fonction $\varphi(t)$ de classe p était obtenue en faisant $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_{p+1} = t$ dans une fonction $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_{p+1})$ continue par rapport aux $p+1$ variables dont elle dépend. Lorsque l'existence effective de toutes les classes de Baire a été prouvée, il en est résulté que les développements que j'avais obtenus pour les fonctions continues de plusieurs variables ne pouvaient être simplifiés.

Pour l'application du nouvel énoncé, il est commode de savoir que, pour qu'un ensemble puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, il faut et il suffit qu'il soit l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction.

Les fonctions représentables analytiquement. — Dans un Mémoire [61] qui, lui, mérite bien d'être qualifié d'abstrait, j'ai étendu les résultats obtenus pour les fonctions de classe un à toutes les fonctions de Baire, c'est-à-dire à toutes les fonctions représentables analytiquement. J'ai pu généraliser tous les énoncés : par exemple, j'ai pu définir, pour tout symbole de classe, α, des points de continuité α et montrer que, pour qu'une fonction soit de classe α au plus, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue α sur tout ensemble parfait.

Mais beaucoup des énoncés obtenus, et celui que je viens de citer en particulier, sont très formels et ne prouvent guère que l'identité de certains problèmes. Les énoncés les plus utiles sont ceux que j'ai obtenus en partant de la forme suivante que j'avais donnée à la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit au plus de classe un : il faut que, quels que soient a et b, l'ensemble $E[a < f < b]$ soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.

Dans cet énoncé interviennent deux catégories intéressantes d'ensembles que je vais généraliser : Un ensemble sera dit F de classe α s'il est défini par une inégalité $a \leqslant f \leqslant b$ à l'aide d'une fonction f de classe α, sans pouvoir l'être à l'aide d'une fonction de classe inférieure; les ensembles F de classe zéro sont les ensembles fermés.

Un ensemble est dit O de classe α dans les conditions analogues, l'inégalité étant maintenant $a < f < b$; les ensembles O de classe zéro sont les ensembles ouverts.

J'ai donné des procédés pour former les ensembles F et O des classes successives : par exemple, on obtient les ensembles O de classe α au plus comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de rang α au plus; on appelle ainsi les produits d'une infinité dénombrable d'ensembles F des classes inférieures à α. Et, d'autre part, j'ai obtenu des énoncés tels que celui-ci : Pour qu'une fonction f soit de classe α au plus, il faut et il suffit que, quels que soient a et b, l'ensemble $E(a \leqslant f \leqslant b)$ soit un ensemble F de classe α au plus.

Mes recherches ont été prolongées par celles, très importantes, de M. de la Vallée Poussin et de M. Sierpinski.

J'avais cru pouvoir généraliser en quelques lignes un raisonnement correct et en déduire que les fonctions obtenues en résolvant des équations dont les deux membres sont des fonctions de Baire sont, elles-mêmes, des fonctions de Baire. Mais la généralisation en question est incorrecte, et le théorème précédent n'est pas démontré, comme l'ont fait observer MM. Lusin et Souslin. Cette erreur semblait devoir infirmer pas mal de mes conclusions, car je renvoyais plusieurs fois à l'énoncé non justifié; mais, en réalité [6], ce n'est pas sur cet énoncé, c'est-à-dire sur la généralisation incorrecte que je m'appuyais, c'était, seulement, sur le raisonnement non généralisé qui, lui, est correct.

Comme conséquence des théorèmes généraux sur les fonctions de classe α, j'ai pu donner des exemples de fonctions appartenant à chacune des classes conçues *a priori* par M. Baire. L'existence effective de ces classes est ainsi prouvée. J'ai pu aussi donner un exemple de fonction n'appartenant pas à la classification de M. Baire. Ces exemples ont une valeur logique; ils n'ont cependant pas de valeur pratique; ce ne sont pas des exemples numériques, car, par exemple, la valeur d'une de ces fonctions peut dépendre de la convergence ou de la divergence d'une série que nous ne savons pas étudier. La portée de mes exemples n'est donc pas la même que celle des exemples numériques de fonctions des classes 1, 2, 3 donnés par M. Baire.

Fonctions et ensembles mesurables; Fonctions et ensembles mesurables B. — Les recherches précédentes fournissent des renseignements sur l'étendue de la famille des fonctions ou ensembles mesurables; *j'ai, en effet, prouvé que toute fonction de Baire est mesurable* B *et réciproquement.* Ce résultat a été retrouvé par M. Vitali. D'autre part, la fonction échappant à la classification de M. Baire que j'ai formée est mesurable; donc il existe des fonctions et ensembles mesurables qui ne sont pas mesurables B.

Examinons les différents procédés de définition des fonctions. Dans tous, on dit : Dans tel ensemble E de points, nous calculerons la fonction de telle manière, algébrique, fonctionnelle ou arithmétique. Tous ces calculs se ramènent à l'emploi des opérations arithmétiques et du passage à la limite à partir de fonctions antérieurement définies; donc ils conduisent, dans chaque ensemble, à des fonctions de Baire, s'ils sont appliqués à partir de fonctions de Baire. Et, si les divers ensembles E sont mesurables B, la fonction finale est aussi mesurable B. Quant aux ensembles E, ou bien ils sont déduits par addition ou multiplication d'ensembles antérieurement définis, et alors, si ceux-ci sont mesurables B, ils sont mesurables B, ou bien ils sont déduits de fonctions antérieurement définies. Or, au cours des études précédentes, il a été démontré qu'en définissant des ensembles par des égalités, ou inégalités comme celles que j'ai utilisées, ou par la considération de l'ensemble des points

de divergence, de convergence, de convergence non uniforme, etc., d'une série de fonctions données, ou par les divers procédés auxquels on a eu recours pour passer de fonctions à des ensembles, on obtient des ensembles mesurables B lorsque les fonctions dont on part sont mesurables B. On comprend ainsi que la famille des fonctions, ou des ensembles mesurables B, soit très vaste, et que, pour en sortir, il faille employer des procédés de définition tout nouveaux.

Si, pourtant, j'ai réussi à définir une fonction non mesurable B, c'est que j'ai utilisé les opérations d'addition et de multiplication, *à partir d'une infinité non dénombrable d'ensembles*. Les recherches entreprises par MM. Lusin et Souslin, pour réparer l'erreur que j'avais commise et dont il a été parlé au paragraphe précédent, les ont conduits à des exemples de fonctions non mesurables B. Leurs raisonnements n'ont pas encore été publiés; ce que nous en savons nous montre qu'eux aussi utilisent des sommes et produits d'ensembles pris en infinité non dénombrable. On voit à quelles complications il faut avoir recours pour sortir du domaine des fonctions de Baire ou fonctions mesurables B.

On a voulu aller plus loin et sortir du domaine des fonctions mesurables; il a fallu avoir recours à l'axiome de Zermelo. Sous sa forme primitive, cet axiome consiste à admettre que, des ensembles étant donnés, *il existe* des moyens de choisir dans chaque ensemble un élément particulier. Le sens des mots *il existe* est assez mystérieux, car cet énoncé ne doit pas être considéré comme contradictoire avec celui-ci : pour telle famille d'ensembles, aucun homme ne pourra jamais définir une correspondance de Zermelo. J'ai [**12**, **60**] précisé les difficultés qu'il y a à admettre cet axiome; j'ai indiqué que, à mon avis, cela revenait à dire qu'on avait le droit de raisonner de façon précise à partir de prémisses imprécises. Je dois ajouter que d'excellents mathématiciens ont une opinion entièrement opposée; M. Hadamard et moi avions échangé sur ce sujet, à l'occasion du Congrès de philosophie de 1914, une correspondance passionnée dont la guerre a empêché la publication. On ne doit guère le regretter, car toutes ces discussions sont oiseuses; l'intérêt de l'axiome de Zermelo serait prouvé le jour où l'on en aurait tiré des résultats positifs utiles. On se familiariserait avec cet axiome en l'employant, et peu à peu on verrait se dissiper les difficultés d'ordre philosophique qui nous arrêtent actuellement.

C'est parce que j'admets que l'avenir pourra me donner tort que j'ai étudié quelques conséquences de l'axiome de Zermelo. Une de ces conséquences est l'existence, au sens mystérieux du mot, d'ensembles et de fonctions non mesurables; M. Vitali en a donné, je crois, le premier exemple; M. Van Vleck, moi-même en avons donné d'autres. Toutes les recherches où intervient l'axiome de Zermelo conduisent à de telles fonctions; j'ai eu trois fois l'occasion d'utiliser cet axiome. D'abord, à la demande de M. Corrado Segre, j'ai étudié [**9**] un problème sur les correspondances à la fois ponctuelles et tangentielles, qui se ramène à la résolution des deux équations fonctionnelles : $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$; $\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$.

Ma conclusion a été qu'en dehors des solutions classiques, il existe, au sens de Zermelo, d'autres solutions, mais aucune qui soit meaurable B, ni même mesurable. A peu près à la même époque, M. Hamel traitait des équations fonctionnelles analogues. Bien des Auteurs ont depuis repris ces questions.

J'ai montré [13] qu'il faudrait s'adresser aux fonctions non mesurables pour définir une correspondance de Zermelo pour la famille des ensembles dénombrables de nombres ou même pour la famille des progressions arithmétiques à deux raisons $a + mr + m_1 r_1$.

Les Idéalistes (partisans de l'axiome) ont souvent reproché aux Empiristes (adversaires) de ne pas être cohérents avec eux-mêmes; sans m'arrêter au petit jeu qui aurait consisté à retourner l'argument, j'ai essayé de bien expliquer la position que j'avais adoptée en montrant quel est le sens empiriste précis de certaines définitions auxquelles on ne voulait accorder qu'un sens idéaliste [17].

Les ensembles $E[a \leqslant f \leqslant b]$, $E[a \leqslant f < b]$, $E[a \leqslant f]$, **etc.** — En terminant ce Chapitre, je voudrais signaler toutes les ressources que j'ai tirées de la considération de ces ensembles. Ce sont eux qui m'ont permis l'intégration de tant de fonctions; ils m'ont permis l'étude des fonctions de classe un et de classe quelconque; ils permettent de caractériser les fonctions de Baire; ils permettent de ramener à un processus uniforme des modes de formation d'ensembles ou de fonctions, très variés en apparence, etc.

Alors que, dans les recherches sur la théorie des fonctions, on introduisait les ensembles au hasard de l'imagination de chacun, en portant son attention soit sur l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction, soit sur l'ensemble des points de convergence d'une série, soit aur d'autres ensembles encore, c'est toujours sur les ensembles attachés à la fonction par les mêmes inégalités $a \leqslant f \leqslant b$, $a \leqslant f < b$, etc., que j'ai raisonné, ce qui a donné une grande unité à mes recherches.

Il est facile de se rendre compte, après coup, de l'intérêt qu'il y avait à considérer ces ensembles. J'ai déjà dit comment l'intégration m'avait conduit à leur considération; l'intégration, étant une opération fonctionnelle, n'exige cependant pas leur considération aussi impérieusement que les opérations sur les nombres. Soit à effectuer sur des fonctions les opérations $\sqrt[m]{u}$, $u + v$, uv, $\log v$, par exemple; alors, peu importent les points pour lesquels u et v deviennent égales à u_0 et v_0, les résultats des opérations ne dépendant que de u_0 et v_0. C'est donc sur les valeurs des fonctions qu'on est conduit à porter son attention; ce sont ces valeurs que l'on va grouper par valeurs voisines et non les valeurs des variables. L'étude des opérations sur les fonctions relève donc bien des ensembles considérés, et comme les fonctions de Baire sont celles qu'on obtient, à partir des variables, par les opérations : addition, multiplication, passage à la limite, il était naturel que ces ensembles pussent servir à l'étude des classes de Baire.

Les méthodes ordinaires de l'Analyse conduisent à porter l'attention tout d'abord sur les variables; s'agit-il, par exemple, de trouver un maximum, on cherchera d'abord quand il est obtenu, qu'il s'agisse d'un problème d'algèbre ou du calcul des variations. Pourtant, dans la pratique, où la fonction correspond en général à l'effet et les variables aux conditions du phénomène, c'est la fonction qui importe; sans doute, il est intéressant de savoir dans quelles conditions une pile de pont supporte la charge maximum, mais ce qu'il faut connaître par-dessus tout, c'est la grandeur de cette charge maximum. La considération systématique des ensembles $E[a \leqslant f < b]$ m'a été pratiquement utile parce qu'elle m'a toujours forcé à grouper les conditions donnant des effets voisins.

CHAPITRE III

CALCUL DES VARIATIONS

Le Problème de Plateau.

Le Calcul des aires. — Le calcul des aires se fait par analogie avec le calcul des longueurs des arcs de courbe. On sait que la longueur d'un tel arc est la limite des longueurs des polygones inscrits dans l'arc et dont les côtés tendent vers zéro. Jordan a prouvé que, pour toute courbe rectifiable, c'est-à-dire de longueur finie, les coordonnées sont des fonctions à variation bornée d'un paramètre.

J'ai montré [85] que si, ce qu'il est toujours possible de réaliser par un changement du paramètre, ces fonctions sont à nombre dérivés bornés, la longueur est donnée par l'intégrale classique. Si le paramètre est l'arc s lui-même, on a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

presque pour toute valeur de s et, sauf pour les mêmes valeurs exceptionnelles de s, *la courbe admet une tangente déterminée*. Cette propriété a été utilisée dans le calcul des variations, notamment par M. Tonelli.

Il est naturel d'essayer d'obtenir, pour le cas des surfaces, des résultats analogues; la question n'est pas très avancée. Quand je me suis occupé de ces problèmes, la notion d'intégrale n'était pas assez étudiée, c'est même à l'occasion de calcul d'aires que j'ai entrepris mes recherches sur cette notion. Depuis, je ne suis pas revenu sur la question qui pourrait maintenant, il me semble, être menée beaucoup plus loin dans l'ordre d'idées où je l'avais abordée. Je me suis à peu près borné à donner une définition de l'aire. Partant d'une définition différente, M. W. H. Young a fait faire récemment à ces problèmes des progrès importants.

Il paraissait naturel de dire : l'aire d'une surface est la limite des aires des surfaces polyédrales inscrites et dont les faces tendent vers zéro. Or, cette définition est inadmissible, car les aires dont il s'agit n'ont aucune limite déterminée et pour certains choix des sommets des polyèdres, ces aires ont une limite infinie. Schwarz, le premier, a montré cette difficulté en prenant l'exemple le plus simple possible : la

surface latérale d'un cylindre de révolution. Cet exemple est si simple qu'il a été retrouvé depuis par plusieurs Auteurs. En présence de cette difficulté, on a adopté parfois des définitions qui n'ont plus aucun rapport avec la considération des polyèdres, qui, par suite, ne se raccordent nullement avec les considérations de la géométrie élémentaire et ne servent guère qu'à « sauver la face », à permettre de ne pas se borner à dire : nous appelons aire telle intégrale double.

Voici comment j'ai raisonné : Le procédé pratique de mesure des courbes matérielles, qui a donné l'idée de la définition mathématique des longueurs, consiste à mesurer un polygone très voisin de la courbe. Or, si l'on considère les polygones tendant vers une courbe C, leurs longueurs tendent, suivant le choix des polygones, vers telle limite que l'on veut, égale ou supérieure à une certaine longueur L. L est donc la seule valeur attachée à la considération des polygones tendant vers C. En fait, L est précisément égale à ce que l'on appelle la longueur de C. Dès lors, on peut adopter des définitions analogues pour la longueur d'une courbe et l'aire d'une surface, en les considérant comme les plus petites limites des longueurs, ou aires, des polygones, ou polyèdres, tendant vers la courbe, ou surface, à mesurer [**43**, **8**].

Cette définition a été assez communément adoptée dans les recherches générales; elle a été fort étudiée, en particulier par M. Zoard de Geöcze; elle pourrait aussi être introduite dès la géométrie élémentaire, ce qui donnerait plus d'unité, de rigueur et de simplicité à l'exposition de tout ce qui concerne les longueurs, les aires et les volumes [**63**].

Pour que la définition précédente soit acceptable, c'est-à-dire donne une aire ayant les propriétés essentielles des aires ordinaires, il faut que le nombre défini possède au moins l'addivité restreinte. Commençons par examiner le cas des domaines plans. Jordan, guidé par une définition descriptive de l'aire, qui est celle que M. Hadamard a formulée pour le cas des polygones, détermine l'aire de certains domaines qu'il appelle *quarrables;* ce sont ceux dont la frontière est de mesure nulle; l'aire est alors la valeur commune de la mesure du domaine ouvert et de la mesure du domaine fermé. Il existe des domaines non quarrables, mais ceux que connaissait Jordan étaient compliqués; aussi Jordan a-t-il demandé, dans l'Intermédiaire des Mathématiciens, s'il existait un domaine simple, limité par une seule courbe sans point multiple, et qui soit non quarrable. En modifiant le procédé qui permit à M. Hilbert de construire une courbe remplissant un carré, j'ai obtenu un exemple d'une telle courbe [**8**]. Quelque temps après, M. Osgood est parvenu, de son côté, à un exemple analogue. Il existe donc bien des courbes non quarrables, comme l'on dit.

On pouvait se demander si le problème des aires était possible ou non pour les domaines qualifiés de non quarrables; modifiant mon exemple primitif, j'en ai déduit [**10**] que le problème des aires est possible pour la famille des domaines simples, quarrables ou non, mais qu'il est indéterminé. La définition descriptive ne détermine l'aire que pour les domaines quarrables. C'est donc bien pour ces seuls

domaines que l'on peut parler d'aires. Il est certain dès lors que, pour que notre définition de l'aire d'une surface soit acceptable, il faudra nous restreindre à des cas où la frontière remplira une certaine condition comme dans le cas du plan. J'ai montré **[8]** que si deux surfaces S_1 et S_2 sont quarrables, c'est-à-dire ont des aires finies, et si leurs frontières se raccordent suivant un arc $\alpha\beta$, la surface $S = S_1 + S_2$ a bien pour aire la somme des aires de S_1 et de S_2, lorsque l'arc $\alpha\beta$ peut être enfermé dans des surfaces polyédrales fermées d'aires aussi petites qu'on le veut. Je dis, dans ce cas, que $\alpha\beta$ est quarrable.

C'est seulement pour les surfaces limitées par des courbes quarrables que j'étudie le problème des aires. De cette manière, l'aire vérifie bien la condition d'additivité; il y a accord entre la définition de l'aire des domaines plans et celle de l'aire des surfaces; il y a accord entre les deux catégories de courbes quarrables planes et gauches. Généralisant un résultat de Jordan, j'ai prouvé que toute courbe rectifiable est quarrable.

Le minimum des intégrales $\int\int f\, da$. — Il serait presque inutile de savoir que l'aire est additive, s'il existait des surfaces quarrables qui ne puissent pas être décomposées en morceaux par des courbes quarrables. J'ai montré qu'une surface quarrable peut toujours être décomposée en morceaux aussi petits que l'on veut par des courbes rectifiables. Une telle décomposition correspond à celle d'une courbe en petits arcs; à chaque petit arc est alors attachée une corde, et la somme des longueurs des cordes est une valeur approchée de la longueur de la courbe. Quelle est l'expression approchée pour l'aire d'une surface? Un contour C étant donné, considérons des calottes polyédrales simplement connexes dont les frontières tendent vers C, la plus petite limite vers laquelle tendront les aires de telles calottes sera dite *aire minima* de C. Une surface S étant donnée, si on la divise en morceaux limités à des contours quarrables C_1, C_2, ..., la somme des aires minima de C_1, de C_2, ... est une valeur approchée de l'aire de S.

Il y a donc entière analogie entre le cas des courbes et celui des surfaces. L'étude de cette analogie m'a conduit à me demander s'il n'existait pas une surface qui soit, pour un contour C, l'analogue de ce qu'est la corde AB pour ses extrémités A et B; en d'autres termes, s'il n'existe pas une calotte de surface simplement connexe limitée à C et dont l'aire soit l'aire minima de C. Ce problème est connu sous le nom de problème de Plateau, du moins quand on admet que la surface cherchée est analytique, ce qui entraîne, comme l'on sait, qu'elle soit une surface minima. Je ne me suis nullement occupé de l'analyticité de la surface solution.

Mes premières recherches **[43]** sur ce sujet ont été faites indépendamment de celles de M. Hilbert sur ce qu'on appelle maintenant la méthode directe du calcul des variations; j'ignorais avoir été précédé par M. Hilbert, de même que ce géomètre ignorait qu'il avait été précédé par Arzelà. C'est sans doute parce que j'avais pensé

à ces questions avant de lire M. Hilbert, que je me suis laissé entraîner par mon penchant naturel à présenter les raisonnements sous un aspect géométrique; j'ajoute que je dois beaucoup, presque tout, à l'étude des travaux de M. Hilbert. La méthode directe d'Arzelà et de M. Hilbert comporte trois opérations. Supposons qu'il s'agisse de trouver le minimum d'une fonctionnelle de ligne ou de surface $\Phi(S)$:

I. On choisira des éléments S_1, S_2, ... ayant un élément limite Σ et tels que $\Phi(S_1)$, $\Phi(S_2)$, ... tendent vers la borne inférieure m des $\Phi(S)$;

II. On démontrera que $\Phi(\Sigma) = m$;

III. On montrera que Σ fournit bien une solution de l'équation différentielle ou aux dérivées partielles du calcul des variations.

Cette méthode n'a pu être employée complètement que dans un petit nombre de cas. Tout récemment, M. Tonelli vient cependant de montrer qu'elle peut être appliquée lorsque $\Phi(S)$ est une intégrale simple correspondant à ce qu'on appelle un problème régulier.

Dans sa première communication, la seule dont j'aurai à m'occuper, M. Hilbert n'étudie que l'opération I; il effectue cette opération, comme l'avait effectuée Arzelà, en utilisant la notion de fonctions également continues due à Ascoli et qui a, depuis, joué un rôle si important dans les travaux de M. Fréchet et surtout dans ceux de M. Montel. C'est bien la même méthode que j'ai utilisée, mais en lui donnant le plus souvent un aspect géométrique, variable avec le problème étudié. L'idée est toujours celle-ci : des S_1, S_2, ..., situés dans une région bornée de l'espace, ont nécessairement au moins un élément limite, si l'on peut affirmer que toute partie d'un S_i est contenue dans une portion de l'espace dont le plus grand diamètre $f(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε, dès que l'on sait que la frontière de cet S_i est elle-même contenue dans une portion de l'espace dont le plus grand diamètre est ε. Par exemple, j'ai prouvé l'existence de la surface minimisante Σ pour le problème de Plateau en remarquant que, dans ce problème, on peut prendre pour les S_i des surfaces polyédrales telles que toute partie d'une de ces surfaces, limitée par un contour Γ, soit intérieure à toute surface convexe qui entoure Γ.

M. Hilbert ne s'occupe pas de l'opération II; il se borne à affirmer que tout problème du calcul des variations a des solutions pourvu que la notion de solution reçoive une extension convenable. On peut, en effet, toujours convenir que $\Phi(\Sigma) = m$. Mais, pour qu'il n'y ait pas là un simple escamotage, il faut tout au moins que, si la fonction $\Phi(S)$ était antérieurement définie pour l'élément Σ, cette ancienne définition et la nouvelle concordent bien.

Pour qu'on soit assuré, *a priori*, qu'il en est ainsi, sans avoir à faire intervenir les propriétés de l'élément inconnu Σ, il faut que, pour tout élément S limite d'éléments S_1, S_2, ..., $\Phi(S)$ soit au plus égale à la plus petite limite de la suite

$\Phi(S_1)$, $\Phi(S_2)$, ... Lorsqu'il en est ainsi, j'ai dit, par extension d'une dénomination que M. Baire venait d'introduire dans la théorie des fonctions de points, que $\Phi(S)$ est partout égale à son minimum ou encore qu'elle est semi-continue inférieurement. Dés les premiers temps de la méthode directe, j'ai montré [**45, 8**] l'importance de cette notion. J'ai prouvé que la définition des longueurs et des aires entraîne la semi-continuité inférieure des intégrales $\int f ds$, $\int\int f da$, intégrales de Stieltjés de fonctions positives, intégrées par rapport à la fonction de domaine égale à la longueur ou à l'aire et ceci m'a permis de prouver l'existence d'un minimum pour ces intégrales, lorsque f reste constamment supérieur à un nombre fixe supérieur à zéro: les intégrales étant étendues soit à toutes les courbes (de l'espace ou d'une surface) joignant deux points donnés, soit à toutes les surfaces limitées à un contour donné. Pour $f=1$, on a respectivement le problème des géodésiques et le probléme de Plateau.

Des remarques de M. Hadamard, des travaux de M. Goursat et de M. Tonelli ont montré que la semi-continuité était beaucoup plus fréquente que je n'aurais osé l'espérer : M. Tonelli a, en effet, prouvé que, dans tous les problèmes réguliers relatifs aux intégrales simples, se rencontre précisément celle des deux semi-continuités qui est nécessaire à l'application de la méthode directe.

Je ne puis passer à une autre question sans rappeler au préalable que des travaux de M. S. Bernstein ont fait faire récemment des progrès essentiels au problème de Plateau, considéré comme problème de détermination d'une solution d'une équation aux dérivées partielles.

Le Problème de Dirichlet.

De la possibilité et de l'impossibilité du problème de Dirichlet. — Ce probléme consiste, comme l'on sait, à trouver une fonction harmonique dans un domaine donné et prenant des valeurs données sur la frontière de ce domaine; il est intimement lié au problème de Riemann, consistant à trouver le minimum de l'intégrale

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

ou de l'intégrale

$$\int\int\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz,$$

étendue à un domaine donné, pour toutes les fonctions f prenant des valeurs données aux frontières du domaine.

Ces deux problèmes ne sont pas équivalents ; M. Hadamard a signalé que l'on peut choisir des valeurs continues sur une circonférence telles que l'intégrale de Riemann étendue au cercle soit infinie pour toute fonction prenant ces valeurs, et cependant le problème de Dirichlet est toujours possible pour un cercle ! Pourtant, si l'on modifie très peu les valeurs sur la circonférence, on peut rendre le problème de Riemann possible, et comme ceci revient à modifier très peu la solution du problème de Dirichlet, l'objection de M. Hadamard n'empêche pas de considérer les deux problèmes comme pratiquement équivalents. La démonstration classique de cette équivalence n'était pourtant pas suffisante ; on prouve bien que, si le problème de Riemann a une solution, celle-ci est solution du problème de Dirichlet ; mais le raisonnement ne peut être utilisé pour prouver la réciproque, parce que la fonction solution n'a pas, en général, de dérivées à la frontière. J'ai [**73**] pu apporter les petits compléments indispensables aux raisonnements classiques, dans les cas où l'objection de M. Hadamard ne porte pas, précisément en m'appuyant sur les calculs de M. Hadamard et grâce aux ressources de la méthode directe. Au sujet du théorème d'existence de la solution du problème de Riemann, M. Zaremba a écrit : « Il est donc connu depuis longtemps, mais, comme l'a justement fait observer M. Lebesgue, qui paraît être le premier à en avoir donné une démonstration rigoureuse, la démonstration classique n'est nullement probante, même si l'on considère la possibilité du problème de Dirichlet comme préalablement démontrée. » Ce que l'on oubliait de faire, c'est l'opération II ; je ne reviendrai plus sur cette opération que j'ai aussi effectuée [**33**] sans utiliser la connaissance de la solution du problème de Dirichlet pour le cas des domaines circulaires.

Pour effectuer I, j'ai employé des procédés assez variés [**54**, **55**, **59**] ; voici celui que j'ai développé dans un Mémoire relatif au problème de Dirichlet plan [**73**]. Une fonction f étant donnée dans un domaine D et prenant des valeurs données sur la frontière F de D, on peut toujours trouver une fonction φ égale à f sur F, dérivable, donnant à l'intégrale de Riemann étendue à D une valeur au plus égale à celle que donne f, et qui soit monotone, c'est-à-dire telle que, dans tout domaine, φ n'atteigne sa borne supérieure et sa borne inférieure que pour des points de la frontière du domaine. Ceci étant, si, des diverses fonctions f_1, f_2, ... d'une suite minimisante, on déduit des fonctions φ_1, φ_2, ..., celles-ci ont une limite. En m'appuyant sur le fait que cette limite est unique, et en utilisant la solution du problème de Dirichlet dans le cas du cercle, j'ai pu facilement effectuer l'opération III par un procédé qui, comme je l'ai dit, n'est peut-être bien que la reconstitution de celui auquel M. Hilbert avait fait allusion dans sa première communication et qu'il n'a jamais développé.

Cette méthode m'a permis de prouver la possibilité des problèmes de Riemann et de Dirichlet dans des cas extrêmement étendus, par exemple pour tous les domaines simplement connexes, que leur frontière soit une courbe de Jordan ou non,

pour tous les domaines dont l'ordre de connexion est fini, quelle que soit la nature de leurs frontières, et même pour beaucoup de domaines ayant une infinité de frontières. Les valeurs données à la frontière doivent être continues, mais peuvent être d'ailleurs quelconques; si ces valeurs $z(x, y)$ sont représentées par des points (x, y, z) de l'espace, les données, frontières du domaine et valeurs aux frontières, sont représentées par une figure de l'espace, par une sorte de contour gauche Γ. Ce que l'on doit entendre par des contours Γ_1, Γ_2, ... tendant uniformément vers Γ est très clair et permet d'indiquer ce que l'on entend par une convergence uniforme des données de problèmes de Dirichlet D_1, D_2, ... vers celles d'un problème D; j'ai montré que, dans ces conditions, les solutions de D_1, D_2, ... tendent uniformément vers celles de D. Il faut remarquer que ce théorème de convergence est très général, car D peut parfaitement avoir un ordre de connexion différent de ceux de D_1, D_2, ...

L'avantage de cette méthode, c'est qu'elle ne nécessite pas une étude spéciale de ce qui se passe au contour, comme c'est le cas dans la plupart des résolutions du problème de Dirichlet. Si l'on consent à faire une telle étude, on peut employer, pour effectuer I et III, les autres procédés que j'ai donnés, en particulier le suivant, dans lequel on n'effectue pas à proprement parler l'opération I et qui, par suite, s'éloigne quelque peu de la forme habituelle de la méthode directe. Grâce à un raisonnement de M. Hilbert, convenablement complété, j'ai pu prouver [59] que deux suites minimisantes ne pouvaient converger uniformément dans un domaine partiel, si petit qu'il soit, sans converger vers la même limite dans ce domaine partiel. Dès lors, partant d'une suite minimisante f_1, f_2, ..., modifions chaque f_i dans un cercle C de manière qu'elle reste continue et devienne harmonique dans C. De cette suite, il n'y a plus de difficulté à extraire une suite partielle ayant une limite dans un cercle C_1 intérieur à C. Cette limite, nécessairement harmonique, est un élément de la solution du problème de Dirichlet, qui est définie ainsi par de tels éléments à la façon d'une fonction de variable complexe.

Pour l'étude aux frontières, je me suis servi [58] de ce que j'ai appelé des fonctions barrières. Soient D un domaine, F sa frontière, $f(x, y)$ les valeurs données sur elle, A un point de F. Soient $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ deux fonctions harmoniques dans D, égales en A à f, et telles qu'en tout autre point de F on ait

$$\varphi(x, y) < f(x, y) < \psi(x, y);$$

φ et ψ sont deux fonctions barrières en A. On peut évidemment assujettir les fonctions des suites minimisantes à rester comprises entre φ et ψ, et par suite, si elles ont une limite, cette limite est continue en A et y prend bien la valeur donnée. Or, *il est facile de construire des fonctions barrières en un point* A *pour une fonction con-*

tinue f quelconque, si l'on sait trouver une fonction harmonique dans D *qui atteigne sa borne inférieure en* A, *et en* A *seulement.*

Cette remarque permet de trouver très rapidement des conditions fort larges pour l'existence de la solution du problème de Dirichlet; cela n'est guère intéressant dans le cas du plan, car la première méthode indiquée va aussi loin que possible, mais cela est utile au contraire dans le cas de l'espace.

M. Zaremba a appelé mon attention sur les difficultés qu'on rencontrait si l'on essayait d'appliquer ma première méthode au cas de l'espace. Après avoir tenté en vain de vaincre ces difficultés, après avoir obtenu, par la méthode des fonctions barrières, des conditions pour l'existence de la solution, non encore publiées, qui, bien qu'extrêmement larges, ne sauraient être comparées à celles données par la première méthode dans le cas du plan, je me suis demandé s'il n'existait pas à cet égard une différence essentielle entre le cas du plan et celui de l'espace. C'est ce qui a lieu en effet : *tandis que l'on peut dire que le problème plan est toujours possible, il y a, dans le cas de l'espace, des données très simples pour lesquelles les problèmes de Dirichlet et de Riemann sont impossibles.*

Je n'ai pas encore développé mes conclusions, que je n'ai données que dans une Note très succincte [31]. Soit OA, un segment de longueur unité dont la substance attirante a, en chaque point P, une densité égale à OP. Les surfaces équipotentielles, qui entourent OA, passent par O pour $V \geqslant 1$.

Considérons le domaine formé par les points M pour lesquels on a $OM \leqslant 1$ et $V \leqslant 2$. La frontière de ce domaine ne contient qu'un vrai point singulier, l'origine; elle contient bien la ligne singulière $OM = 1$, $V = 2$, mais une petite modification du domaine la ferait disparaître. De sorte que notre domaine D est tout à fait comparable au domaine qui serait engendré par la révolution d'une cardioïde autour de son axe; eh bien, pour ce domaine, les problèmes considérés sont impossibles pour des valeurs $f(P)$, données aux frontières, aussi simples que $f(P) = OP$! Cela, d'après le théorème sur les fonctions barrières.

Il existe alors bien une fonction $F(M)$ bornée dans D, continue *sauf en* O, harmonique à l'intérieur de D, égale à $f(P)$ en tout point de la frontière sauf en O: mais cette fonction est discontinue en O. Si l'on prend une suite F_1, F_2, ..., minimisante pour l'intégrale de Riemann, et si cette suite est convenablement choisie, elle tendra bien vers une limite à l'intérieur de D, mais cette limite sera la fonction $F(M)$, discontinue en O.

Calcul de la solution du problème de Dirichlet. — Toute démonstration d'existence fournit, théoriquement, un procédé de calcul; d'autre part, tout procédé de calcul devient, pratiquement, illusoire dès que les données ne sont plus très particulières; pourtant il y a lieu de mettre à part les procédés qui donnent des développements en série de la solution.

Pour toutes les fonctions $f(M)$, harmoniques dans un cercle $C(R, P)$, de rayon R et de centre P, on a :

$$f(P) = \frac{1}{\pi R^2} \int\int_{C(R,P)} f(M) dM.$$

Cette égalité exprime le théorème de la moyenne de Gauss ; on sait que, si elle est vraie dans tout $C(R, P)$, quels que soient R et P, et si f admet certaines dérivées, réciproquement $f(P)$ est harmonique. Bien des Mathématiciens, des Mathématiciens italiens en particulier, se sont demandés si l'on ne pouvait pas conserver au théorème de Gauss toute sa valeur de propriété caractéristique des fonctions harmoniques en faisant le moins d'hypothèses possible sur f et sur les $C(R, P)$. J'ai apporté ma contribution à ce genre de recherches, indirectement ; en me servant uniquement de l'égalité de Gauss pour le calcul d'une solution du probléme de Dirichlet, je montrais que cette égalité, avec l'interprétation que je lui donnais, était caractéristique des fonctions harmoniques. Mes raisonnements supposent la possibilité du probléme de Dirichlet antérieurement démontrée ; j'ai attiré l'attention **[29, 38]** sur l'intérêt qu'il y aurait à prouver directement le théoréme de Gauss : les calculs que je vais indiquer fourniraient alors, en même temps, la plus simple des preuves de l'existence de la solution du problème de Dirichlet.

Soient D un domaine donné, P un point de ce domaine, $K(P, M)$ une fonction positive qui, pour P fixe, ne dépend que de la distance PM, qui devient nulle quand PM surpasse la plus courte distance de P à la frontière de D, et dont l'intégrale, étendue à D, égale 1. Alors le théoréme de Gauss appliqué à toute fonction harmonique dans D, donne

$$f(P) = \int\int_{D} K(P, M) f(M) dM.$$

C'est là une équation de Fredholm, homogène et singulière, car $K(P, M)$ peut devenir infini pour P tendant vers D. Elle ne peut servir, à la façon de l'équation classique, à résoudre le probléme de Dirichlet, puisqu'elle est vérifiée par toutes les fonctions harmoniques dans D ; elle équivaut à l'équation de Laplace et ne caractérise pas une solution de cette équation, puisque les valeurs f données sur la frontière de D n'y interviennent pas.

Mais, partons d'une fonction $f(M)$ prenant les valeurs données au contour et appliquons-lui l'opération du second membre ; nous trouvons une premiére itérée $f_1(M)$, à partir de laquelle nous formerons successivement f_2, f_3, ...; ces fonctions convergent vers la solution demandée, supposée existante **[58]**.

On peut assujettir K à des conditions moins restrictives ; on peut aussi utiliser de la même maniére cette autre forme du théorème de la moyenne dans laquelle on

intègre sur une circonféreuce; l'emploi des intégrales de Stieltjès permettrait d'ailleurs de réunir ces deux formes du théorème. Le cas de l'espace se traite exactement de même.

On peut rattacher cette méthode aux remarques suivantes : Dans le cas des intégrales simples, il suffit souvent qu'une suite soit minimisante pour que les éléments de cette suite aient au moins un élément limite, c'est, par exemple, ce qui se passe dans le problème des géodésiques ; il n'en est plus en général ainsi s'il s'agit d'une intégrale double et *a fortiori* triple, puisqu'alors le problème peut être impossible ; on a vu cela à l'occasion des problèmes de Plateau et de Dirichlet. Il faut, auparavant, faire subir aux fonctions de la suite une opération fournissant une seconde suite minimisante, et c'est celle-ci dont les éléments ont au moins un élément limite, lorsque le problème est possible : par exemple, nous avons remplacé la première suite par une suite de fonctions monotones dans le probléme de Dirichlet plan. M. Zaremba a utilisé de la même manière le passage d'une fonction à sa première itérée : cette opération a comme effet de niveler en quelque sorte les aspérités locales, et c'est pourquoi M. Boussinesq a aussi employé parfois le même procédé.

L'opération à faire subir aux fonctions des suites minimisantes doit être telle qu'elle laisserait invariable la fonction solution ; si, de plus, la fonction solution est *la seule* qu'elle laisse invariable, il y aura des chances pour que la répétition de cette opération, à partir d'une fonction quelconque satisfaisant aux conditions aux limites du problème étudié, conduise à la solution du problème. C'est pourquoi l'itération par les formules de la moyenne était tout indiquée. Une autre opération indiquée pour le probléme de Dirichlet consiste, le domaine D étant la somme de domaine D_i, à modifier la fonction f successivement dans les divers D_i, une infinité de fois, de façon à la rendre chaque fois harmonique dans l'un des D_i. J'ai montré [**73**] que cette opération réussit; c'est la méthode alternée de Schwarz ou la méthode du balayage de Poincaré, suivant les cas.

Questions géométriques et analytiques.

Problèmes non réguliers. — On sait que, lorsque un probléme est régulier positif, au voisinage de toute fonction on en peut trouver une autre donnant une valeur plus grande à la fonctionuelle dont on étudie la variation ; la seule question qu'on se pose alors, dans le calcul des variations, est de savoir si la fonctionnelle a un minimum. J'ai eu plusieurs fois l'occasion de rechercher, au contraire, le maximum d'une fonctionnelle régulière positive ou, inversement, le minimum d'une fonctionnelle régulière négative. On est bien certain à l'avance que, si ce maximum ou ce minimum est atteint, ce sera pour une fonction située aux frontières du champ

fonctionnel envisagé. Mais ces fonctions frontières forment encore une famille très vaste; elles dépendent elles-mêmes de fonctions arbitraires et, par suite, la remarque précédente ne résout pas la question. Pourtant, dans les quelques cas que l'on traite ordinairement, le problème se ramène facilement à une question d'algèbre; car l'on peut alors démontrer que la fonction solution doit vérifier, pour toutes les valeurs des variables, l'égalité qui montre que cette fonction est une fonction frontière du champ; en d'autres termes, il suffit d'étudier la fonction au voisinage d'un quelconque de ses points pour pouvoir reconnaître qu'elle est une fonction frontière.

Mais les champs que j'ai été conduit à examiner ne sont pas définis à la façon habituelle, et, pour cette raison, je n'ai pu m'appuyer sur la conclusion précédente encore que, de la solution même des problèmes, il est apparu, après coup, que cette conclusion était encore exacte.

J'ai dit, au Chapitre II, que j'avais cherché quel est le maximum de la valeur absolue de la somme des m premiers termes de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ de module inférieur à 1. La recherche de ce maximum $\rho(m)$ est un problème non régulier; le maximum est atteint pour une fonction discontinue égale en tout point (ou au voisinage de tout point, car la fonction extrémale n'est définie qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle près) soit à 1, soit à -1. J'ai recherché aussi le maximum du coefficient de Fourier a_n, par exemple, pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz (10); il est atteint pour une fonction représentée par une ligne brisée dont tous les côtés font avec ox l'angle maximum compatible avec la condition de Lipschitz. Le maximum de a_n est $\frac{4\lambda}{\pi}$. J'ai traité moins complètement les problèmes analogues relatifs aux diverses classes C, C^{I}, C^{II}, C^{III}, C^{IV}; je me suis contenté de trouver l'ordre de grandeur du maximum [**15**].

Une question étudiée par M. Bricard, et antérieurement par M. Jung, m'a conduit à nouveau à ce genre de recherches. M. Bricard, considérant toutes les figures planes, par exemple, dont le plus grand diamètre ne surpasse pas une longueur donnée D, déterminait quel est le rayon du plus petit *couvercle circulaire* capable de recouvrir chacune de ces figures. J'ai d'abord [**34, 62**] repris la démonstration de M. Bricard de façon à l'étendre au cas d'un espace à un nombre quelconque de dimensions; me bornant ensuite au cas du plan, j'ai traité la question comme il suit : soit F une des figures planes considérées; je montre qu'on peut considérer F comme tout ou partie d'une figure Φ à laquelle on ne peut ajouter de points sans que son diamètre surpasse D. Une telle figure Φ est limitée par une courbe convexe Γ à laquelle, parallèlement à toute direction, on peut mener deux tangentes dont la distance est D; ce sont les orbiformes de largeur D, déjà considérées par Euler. Or, si C est le plus petit cercle contenant une orbiforme Γ et si son rayon est ρ, le cercle concentrique et de rayon $2D-\rho$ est le plus grand cercle intérieur à Γ, et, enfin, le cercle concentrique de rayon D est celui de tous les cercles qui,

dans une correspondance par tangentes parallèles avec Γ, donne la plus petite valeur possible pour le maximum de l'écart entre les tangentes correspondantes. Cette plus petite valeur est $\rho - D$; pour avoir le maximum de ρ, il faut donc chercher le maximum de cette plus petite valeur. Or, il suffit de prendre, pour représenter Γ, les coordonnées polaires tangentielles avec lesquelles on étudie toujours les courbes convexes, pour que le problème se formule ainsi : *$f(\varphi)$ étant la fonction qui définit Γ, quelle doit être $f(\varphi)$ pour que sa meilleure approximation possible, au sens de Tchebycheff, par une suite de Fourier d'ordre un, soit aussi grande que possible?* Cette question est du type de celles qu'il faudrait résoudre si l'on voulait, dans les questions d'approximation dont il a été question au Chapitre II, ne pas se borner à des calculs d'ordre de grandeur, mais si l'on exigeait des limites exactes. Il est d'ailleurs effectivement possible de calculer ces limites, au moins tant qu'il s'agit de l'approximation par des polynômes de degrés très petits ou par des suites de Fourier d'ordre très petits.

J'ai résolu la question précédente, où la fonctionnelle à étudier est d'un type tout nouveau, *car elle n'est pas exprimable par une intégrale;* l'orbiforme minimisante est formée de trois arcs égaux de rayon D formant un triangle équilatéral curviligne.

Problème des isopérimètres. — J'ai eu l'occasion [87] d'exposer, en la simplifiant quelque peu, et en lui donnant une portée plus générale, l'originale méthode par laquelle M. Hurwitz démontre le théorème des isopérimètres grâce à l'emploi des séries de Fourier. L'étude des orbiformes m'a conduit de nouveau à ce théorème.

Les orbiformes de largeur D ont toutes pour longueur πD; ce résultat est dû à Euler; il est alors naturel de se demander quelle est celle de ces orbiformes qui a la plus petite aire et quelle est celle qui a la plus grande aire. Par un même raisonnement élémentaire **[35, 62]**, j'ai démontré que le maximum de l'aire est obtenu pour l'orbiforme équilatérale et le minimum pour l'orbiforme circulaire. Ce dernier fait résulterait du théorème des isopérimètres, mais mon raisonnement démontre en même temps ce théorème. Je construis la courbe cherchée, dans l'un et l'autre cas, en déterminant successivement ses tangentes parallèles à certaines directions, par exemple, parallèles à toutes les directions $\frac{p}{q}\pi$, les nombres $\frac{p}{q}$ étant rangés dans un ordre déterminé. Je montre qu'il faut, chaque fois qu'on en est arrivé à la détermination d'une tangente, choisir cette tangente comme s'il s'agissait de rendre maximum ou minimum l'aire du polygone que l'on va ainsi former; faute de faire cela, le « manque à gagner » vers le maximum ou le minimum ne se rattraperait jamais. L'étude des orbiformes m'a conduit à résoudre ou à poser d'autres problèmes de minimum ou de maximum pour des fonctionnelles qui ne rentrent pas dans les types classiques. M. J. Pàl a étudié l'un d'eux.

Dans l'une des séances d'analyses de mémoires que M. Hadamard a organisées au Collège de France, à l'occasion d'un intéressant travail dans lequel M. Tonelli étend la démonstration, donnée autrefois par Schwarz, de la propriété de minimum de la sphère, autant que le permet la définition générale de l'aire que j'ai formulée, j'ai indiqué la méthode par laquelle j'étais arrivé au même résultat. Je n'ai pas encore publié cette méthode.

Il s'agit de trouver, parmi tous les corps ayant le même volume, quel est celui dont la surface a la plus petite aire. Soient S_1, S_2, ... une suite de surfaces minimisantes; il faut transformer cette suite en une autre qui soit minimisante et convergente. Pour cela, si, sur une parallèle X à ox, S_i découpe des segments de longueur totale $2l$, je prends sur X les deux points situés à la distance l de ox; ces points décrivent T_i. De T_i, je passe à U_i, oy remplaçant ox; puis de U_i à V_i, oz remplaçant ox. La suite des V_i est minimisante et convergente; elle tend vers une sphère.

J'ai étudié d'autres généralisations du théorème des isopérimètres. Si, sur une surface fermée S d'aire A, on recherche la courbe de plus petite longueur enfermant une aire a, on trouve en même temps celle de plus petite longueur qui enferme $A - a$. Ceci m'a conduit [**36**] à me demander comment il faut choisir des courbes, pour qu'elles soient de longueur totale aussi petite que possible, et qu'elles délimitent sur le plan, ou sur une surface donnée, p domaines dont les aires a_1, a_2, ..., a_p sont données. Supposons la surface analytique; on sait alors à l'avance que les courbes sont des cercles géodésiques, et l'on n'a à résoudre qu'un problème d'algèbre. On arrive aux propositions suivantes : En aucun point il ne passe plus de trois cercles géodésiques frontières; en un point où passent trois frontières, elles se coupent sous 120°, et leurs trois cercles de courbure géodésique en ce point ont deux points communs.

Au lieu de traiter le cas de courbes sur une surface analytique, on peut étudier le cas de courbes tracées sur un polyèdre. En développant le polyèdre sur le plan, on voit que l'on a alors affaire à un problème plan. Le cas du tétraèdre régulier (comme celui des tétraèdres dont les arêtes opposées sont égales) est particulièrement simple et donne des résultats élégants parce que le développement du tétraèdre peut se poursuivre indéfiniment sur le plan de manière qu'à tout point du plan corresponde un point et un seul du tétraèdre.

Le fait que les courbes frontières se coupent sous 120° ne provient pas de ce que les aires sont données; au lieu des aires, on se serait donné les valeurs de n'importe quelles intégrales étendues aux domaines considérés que la même propriété aurait subsisté. Elle provient tout simplement de ce que le point O, pour lequel la somme des distances aux trois sommets d'un triangle ABC est minimum, est tel que OA, OB, OC font entre elles 120°, si O n'est ni en A, ni en B, ni en C. J'ai eu ainsi l'occasion d'écrire, sur ce vieux problème élémentaire, un article [**83**] qui contient

peut-être quelques idées nouvelles; j'ai appelé, en particulier, l'attention sur le parti qu'on pouvait tirer de la remarque évidente suivante : Si a est sur OA entre O et A, et si de même b est sur OB, c sur OC, O donne aussi le minimum de la somme des distances d'un point aux sommets du triangle abc; par suite, ce que l'on a à trouver quand on se demande le minimum de OA + OB + OC, c'est une configuration de trois demi-droites OA, OB, OC.

CHAPITRE IV

ANALYSIS SITUS – GÉOMÉTRIE – TRAVAUX DIVERS

Analysis Situs.

Bien que je n'aie publié que tout récemment un travail de quelque étendue sur cette partie si importante et si peu étudiée des mathématiques, je m'y suis toujours intéressé depuis que la préparation d'une leçon d'agrégation sur le théorème d'Euler relatif aux polyèdres me l'a en quelque sorte révélée. Au moment où je sortais de l'École Normale, l'attention des jeunes gens était d'ailleurs attirée sur cet important sujet par le cours d'analyse de Jordan, par les leçons de M. Picard sur les fonctions algébriques et par le premier mémoire de Poincaré qui venait de paraître. Je me permets d'indiquer deux remarques qui m'ont été suggérées par la lecture de ce mémoire.

Si l'on considère une variété polyédrique à p dimensions, et si $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots\ldots$ sont les nombres des éléments à $p, p-1, \ldots\ldots$ dimensions de cette variété, on a, si p est impair :

$$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \ldots\ldots = P_{p-1} - P_{p-2} + \ldots\ldots - P_1;$$

les P_i étant les nombres de Betti de la variété. C'est le théorème d'Euler, généralisé par Poincaré. Si l'on s'appuie sur l'égalité des nombres de Betti équidistants des extrêmes, on en conclut $N = 0$. La seconde démonstration, donnée par Poincaré, du théorème d'Euler est inattaquable; mais, à cause des objections faites par M. Heegaard à la démonstration de l'égalité des nombres de Betti équidistants des extrêmes, on ne peut pas conclure $N = 0$. Or, j'ai remarqué que l'on pouvait très simplement prouver que $N = 0$ et, par suite, avoir une première relation entre les nombres de Betti; pour $p = 3$, cette relation $P_2 - P_1 = 0$ prouve l'égalité des nombres de Betti.

En effet, par une transformation par polaires réciproques convenable, transformons notre variété V en une variété V'; entre les α_i et les α_i' relatifs à ces deux variétés, on aura $\alpha_p = \alpha_0'$, $\alpha_{p-1} = \alpha_1'$, $\ldots\ldots$, car la transformation est tangentielle. Mais modifions très peu V de façon à avoir une variété non polyédrique, la transformation devient ponctuelle et $P_1 = P_1'$, $P_2 = P_2'$, $\ldots\ldots$ La propriété est démontrée.

Dans son second mémoire, Poincaré utilise des polyèdres qu'il appelle polyèdres réciproques et qui ont entre eux, au point de vue de l'Analysis Situs, les mêmes relations que V et V'.

Des idées de Riemann et Betti, il est possible de déduire d'autres invariants que les nombres de Betti. Soit, par exemple, une variété V à trois dimensions ayant un nombre de Betti $P_2 = p$, ce qui veut dire qu'il existe $p-1$ surfaces S_1, S_2, ... linéairement indépendantes. Elles ont des nombres de Betti q_1, q_2, ... Les S_i sont très largement indéterminées, donc aussi les q_i; mais, si l'on choisit les S_i de façon que la somme des q_i soit minima, ces q_i sont déterminés : ce sont $p-1$ invariants.

Invariance du nombre des dimensions d'un espace. — Rien ne paraît plus clair et plus simple que la notion du nombre des dimensions d'un espace; lorsque Cantor eut montré qu'on pouvait établir une correspondance univoque entre les points de deux espaces quelconques, il fallut bien reconnaître que cette clarté n'était qu'apparente. Weierstrass appela l'attention de M. Lüroth sur l'intérêt qu'il y aurait à prouver qu'on ne peut établir une correspondance qui soit à la fois, dans les deux sens, continue et univoque entre les points de deux espaces à m et p dimensions ($p \neq m$). C'est cette proposition qui constitue le théorème sur l'invariance du nombre des dimensions.

M. Lüroth a démontré ce théorème pour $p=1$, et aussi pour $p=3$ lorsque $m=2$ ou 4. Ce n'est qu'en 1911 que le théorème a été complètement démontré par M. Brouwer. A l'occasion de la publication du travail de M. Brouwer, j'ai indiqué [66] le principe d'un raisonnement permettant aussi d'établir ce théorème; j'ai développé récemment [60] la démonstration. Elle est basée sur une remarque très simple : supposons que l'on divise le plan en petits domaines, en petits polygones par exemple; il y aura nécessairement des points communs à 3 de ces polygones et, si ces polygones sont convenablement choisis, il n'y aura pas de point commun à plus de 3 polygones. Il en serait ainsi, par exemple, dans le cas d'un pavage hexagonal du plan. Opérons de façon analogue pour l'espace ordinaire, nous trouverons alors des points communs à 4 polyèdres. Le nombre 4 remplace le nombre 3; il y a là une différence essentielle entre les deux espaces considérés, à deux et à trois dimensions. Cette remarque, convenablement formulée, fournit la démonstration du théorème d'invariance, non seulement lorsqu'il s'agit de comparer deux espaces, mais aussi si l'on compare deux variétés frontières, par exemple la frontière d'une partie du plan avec la frontière d'une partie de l'espace ordinaire.

La même remarque m'a permis de prouver une proposition formulée depuis longtemps par M. Schoenfliess et, pour cette raison, dénommée théorème de Schoenfliess; si l'on établit une correspondance univoque et continue entre les points de deux domaines ayant le même nombre de dimensions, les points intérieurs se correspon-

dent entre eux, ainsi que les points frontières. Cette propriété est capitale pour la théorie des fonctions implicites, comme l'a très justement montré M. Hadamard.

Dans une Note des *Comptes rendus* [57] non encore développée, j'ai indiqué d'autres démonstrations du théorème d'invariance en rapport avec la proposition connue sous le nom de théorème de Jordan.

Le théorème de Jordan. — Jordan a démontré qu'une courbe fermée partage le plan en régions; la proposition générale est que toute variété fermée à $n-1$ dimensions, située dans un espace à n dimensions, partage cet espace en régions.

On savait bien que cette proposition, le théorème d'invariance et le théorème de Schoenfliess étaient intimement liés; M. Baire avait même publié à ce sujet un article très suggestif. Mais le théorème de Jordan paraissait aussi difficile à prouver que les autres; on ne voyait pas, en particulier, comment on pourrait raisonner par récurrence. C'est pourtant par récurrence que j'ai prouvé le théorème, mais grâce à une récurrence différente de celle que l'on cherchait et qui n'a été possible pour moi que parce que j'ai considérablement élargi la proposition à démontrer.

Considérons dans l'espace E à n dimensions, deux variétés fermées V_p et V_q à p et q dimensions, $p<n$, $p+q=n-1$. Soient V_p', V_q' deux variétés voisines de V_p, V_q et polyédrales: il pourra arriver que l'on puisse, par déformation continue, réduire V_p' à un point sans traverser V_q'; il se pourra, au contraire, qu'il faille traverser V_q' α fois. Si α est impair, nous dirons que V_p et V_q sont enlacées. Voici maintenant l'énoncé que je substitue à celui du théorème de Jordan : *Si, dans l'espace* E_n, *on a la variété* V_p, $p<n$, *on peut toujours trouver une variété* $V_{n-(p+1)}$ *enlacée avec elle.*

Pour donner à cet énoncé toute sa portée, il faut convenir qu'une variété V_0 est constituée par deux points. Alors le théorème est évident pour $p=0$; par récurrence, on s'élève de $p=0$ à $p=n-1$; le théorème de Jordan est précisément équivalent à l'énoncé précédent dans lequel on a fait $p=n-1$.

Cet énoncé est d'ailleurs intéressant au même titre que son cas particulier: le théorème de Jordan. Tandis que celui-ci est lié à la notion de période polaire des intégrales étendues à des variétés à $n-1$ dimensions de l'espace à n dimensions, l'énoncé général est lié de la même façon à la notion de période polaire des intégrales multiples d'ordre $n-1$ les plus générales.

Depuis ma Note, le théorème de Jordan a été démontré aussi par M. Brouwer avec ce complément important : il n'y a que deux régions. M. Brouwer a étudié la notion de variétés enlacées que j'ai introduite; M. Antoine a utilisé cette notion dans sa si remarquable Thèse.

Les courbes de Peano. — On appelle ainsi les courbes qui remplissent un domaine et dont le premier exemple est dû à M. Peano. J'ai eu plusieurs fois l'occasion de

définir de telles courbes; j'ai employé une définition arithmétique très simple qui réussit lorsqu'il s'agit d'un espace à un nombre quelconque de dimensions [**87**] ou même d'un espace à une infinité dénombrable de dimensions [**61**]. C'est en vue d'applications que j'ai donné ces exemples; car si, avant moi, il semble qu'on ait regardé les courbes de Peano seulement comme une monstruosité mathématique, j'en ai fait un instrument de démonstration. Elles m'ont servi, par exemple, à passer du théorème de Borel sur les intervalles au théorème analogue pour les divers espaces, à passer du théorème de Baire pour les fonctions de classe un à une variable, au même théorème pour les fonctions de plusieurs variables, à donner des exemples de fonctions des diverses classes de Baire et de fonctions échappant à la classification de Baire, à passer de la dérivation des intégrales définies des fonctions d'une seule variable à la dérivation des intégrales multiples. Maintenant, grâce à la notion d'intégrale de Stieltjès, ces passages de l'intégration simple aux intégrations multiples seraient beaucoup plus faciles encore.

On s'explique aisément que la considération de ces courbes puisse être utile, car M. Peano a été conduit à définir une courbe remplissant un domaine par les réflexions suivantes : d'après le théorème d'invariance, on ne peut établir une correspondance ponctuelle entre une droite et un espace qui soit à la fois continue et univoque dans les deux sens; mais cela est-il possible lorsque l'on n'exige la continuité et l'univocité que dans un sens? Les courbes de Peano donnent une réponse affirmative à cette question; elles établissent ainsi, entre une droite et un espace, une correspondance aussi parfaite, au point de vue de l'Analysis Situs, qu'il est possible; et c'est pourquoi elles m'ont, dans bien des questions, permis d'atténuer les différences entre les espaces ayant des nombres différents de dimensions.

La correspondance entre une droite et un espace est imparfaite parce que les courbes de Peano ont nécessairement des points multiples; j'ai recherché à quel ordre de multiplicité minimum on pouvait réduire ces points. J'ai montré [**60**] que, s'il s'agit d'un espace à n dimensions, une courbe remplissant un domaine a nécessairement des points multiples d'ordre $n+1$ et peut être choisie de manière à ne pas avoir de points d'ordre supérieur à $n+1$. Ainsi, une courbe remplissant un domaine D de l'espace ordinaire a nécessairement des points au moins quadruples dans toute partie de D: dans un domaine plan intérieur à D, il n'y a peut-être pas de points quadruples de la courbe, mais il y a nécessairement des points au moins triples; sur tout segment intérieur à D, il y a des points au moins doubles de la courbe.

Surfaces applicables.

Les Surfaces applicables sur le plan. — Dans certains livres de géométrie élémentaire on apprend aux enfants comment il faut plier une feuille de carton pour

construire les divers polyèdres réguliers. C'est à ces livres que j'ai immédiatement pensé lorsqu'on m'a démontré, pour la première fois, que les surfaces applicables sur le plan sont toutes des surfaces développables. Le désaccord apparent entre cet énoncé et l'existence même de l'art du cartonnier s'explique de suite : un polyèdre est une surface non analytique et possédant des lignes singulières; dans la recherche des surfaces applicables sur le plan on ne s'occupe que des surfaces régulières ou même analytiques. Cette remarque faite, je n'ai plus pensé à la question; mais elle m'est revenue à la mémoire quand j'ai lu le Chapitre de la Thèse de M. Baire consacré à la recherche de toutes les solutions de l'équation $p=q$. Je me suis mis alors à rechercher toutes les surfaces correspondant point par point à une portion de plan, la correspondance conservant les longueurs pour toutes les courbes, qu'elles soient ou non des surfaces développables. *J'ai trouvé des surfaces applicables sur le plan, au sens que je viens de dire, et qui ne sont pas des développables; certaines sont réglées, d'autres ne le sont pas et même ne contiennent aucun segment de droite* [**42, 8**]. L'application conserve aussi les aires.

Soient $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ trois fonctions à variation bornée dont la variation totale dans (t_1, t_2) est égale à $|t_2 - t_1|$, quels que soient t_1 et t_2, la transformation

$$X = f(x), \qquad Y = g(y), \qquad Z = h(z),$$

fait correspondre à toute surface, lieu d'un point x, y, z, une surface S, lieu de X, Y, Z. Ces deux surfaces sont applicables, au sens indiqué plus haut de la conservation des longueurs. En prenant pour s un plan ou une développable, on a donc des surfaces applicables sur le plan. En particulier, en prenant $f(x)=x$, $g(y)=y$, et pour $h(z)$ toutes les fonctions possibles, on transforme tous les cônes de révolution autour de OZ en toutes les surfaces de révolution qui sont applicables sur le plan.

Si l'on imagine que les génératrices d'un tel cône s se réfléchissent sur un plan $z=z_1$ au lieu de le traverser, on aura une première transformée s_1 de s. Si, de même, on fait réfléchir certains segments des génératrices de s_1 sur un plan $z=z_2$, on a une autre transformée s_2. La répétition indéfinie de ces réflexions, suivie d'un passage à la limite, est un autre procédé pour trouver toutes celles des surfaces solutions qui sont de révolution. Ce procédé montre qu'on pourrait, de façon approchée, réaliser matériellement ces surfaces tout aussi bien que s'il s'agissait d'une surface conique ordinaire.

Toute développable analytique est une solution de notre problème; mais il est bien remarquable qu'un cylindre, un cône, la surface formée par les tangentes à une courbe gauche ne sont pas nécessairement applicables sur le plan. J'ai déterminé les conditions que doivent remplir ces surfaces pour être applicables sur le plan. J'ai donné des exemples de surfaces réglées, dont les génératrices enveloppent

une courbe gauche, qui ont un plan tangent le long de chaque génératrice et qui, pourtant, ne sont pas applicables sur un plan.

Le problème des surfaces applicables, de la géométrie des surfaces, a été évidemment suggéré par la considération des déformations matérielles; pourtant, dans la plupart des déformations physiques, il y a modification des longueurs; il s'agit alors d'un problème appartenant à la théorie de l'Élasticité. Traitant l'un de ces problèmes, M. Hadamard observe que le feuillet moyen d'une lame primitivement plane satisfait approximativement aux équations qui définissent les surfaces analytiques applicables sur le plan, et il se demande si ces surfaces sont nécessairement voisines des développables analytiques. Sans prétendre, par là, répondre à cette question, j'indique qu'en tout cas, le feuillet moyen est voisin d'une surface applicable sur le plan, analytique ou non.

Récemment, M. Gambier s'est inspiré de mes recherches pour étudier certaines surfaces applicables sur le paraloloïde.

Théorème de Cauchy. — La transformation du paragraphe précédent permet de déformer une surface quelconque prise en totalité; au contraire, lorsqu'il s'agit de déformations analytiques, elles ne s'appliquent le plus souvent qu'à une partie de la surface; c'est ainsi qu'on ne peut déformer le plan pris en entier qu'en certains cylindres. M. Weyl, généralisant un résultat relatif à la sphère, a démontré que deux surfaces analytiques convexes fermées, applicables en totalité l'une sur l'autre, sont égales ou symétriques. Cauchy avait prouvé que deux polyèdres convexes fermés ayant des faces égales et disposées de la même manière sont égaux ou symétriques. Je rapproche ces énoncés parce que je suis persuadé qu'il y a un théorème à trouver qui les contiendrait tous deux comme cas particuliers.

La démonstration de Cauchy présentait une lacune qui n'avait jamais pu être comblée. En réponse à une question posée par M. Hadamard dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, j'ai exposé deux procédés qui permettent d'achever la démonstration [64]. L'un d'eux repose sur des constructions de polyèdres; l'autre, que M. Hadamard a introduit, légèrement modifié, dans la plus récente édition de sa *Géométrie élémentaire*, utilise les égalités mêmes qui servaient à Cauchy.

Géométrie.

Géométrie infinitésimale. — A l'occasion de ma seconde Thèse, j'ai remarqué qu'un mode de transformation des surfaces minima, considéré par M. Goursat, définissait une transformation de contact de l'espace, et je me suis demandé, inversement, quelles étaient les transformations de contact les plus générales qui faisaient

correspondre à toute surface minima, une surface minima [20]. Ce sont celles considérées par M. Gnursat; ces transformations sont tangentielles. A une transformation par figures semblables près, elles se définissent ainsi : une surface minima Σ_0 étant arbitrairement choisie, on fait correspondre au plan P, le plan P′ parallèle à P, équidistant de P et du plan Π parallèle à P et tangent à Σ_0.

Si l'nn prend pour Σ_0 une surface parallèle à une surface minima, on a la transformation de contact la plus générale n'altérant pas la famille des surfaces parallèles aux surfaces minima.

Mannheim, étudiant les rapports entre la surface des ondes et une certaine famille de quadriques homofocales, avait prouvé incidemment que si, par une tangente variable à une ligne de courbure d'une quadrique Q, nn mène des plans tangents à des quadriques Q_1, Q_2, ... homofocales à Q, on a un faisceau de plans de grandeur constante. M. Bricard a montré que la même propriété est vraie pour les tangentes aux géodésiques de Q et qu'il s'agit donc là d'une des interprétations de la relation de Joachimsthal. Après avoir exposé les résultats de Mannheim [72], j'ai démontré la propriété de Mannheim-Bricard par un petit raisonnement de géométrie infinitésimale consistant à chercher dans quels cas la variation d'un certain dièdre est nulle. On prouve en même temps le théorème de Joachimsthal sur les développées des cnurbes gauches.

M. Bricard a signalé un autre mouvement à deux paramètres dans lequel tous les plans d'un certain faisceau enveloppent des quadriques; la démonstration élémentaire de cette propriété peut être obtenue, en quelques lignes, grâce à la considération des triangles sphériques [68].

Dans le Cours sur la partie géométrique du programme du Certificat de Calcul différentiel et intégral, que j'ai professé à la Sorbonne pendant dix ans, j'ai eu l'occasion d'introduire bien des démnnstrations; les principales concernent les propriétés des développées des courbes gauches et le théorème de Lancret; la conservation, dans l'application des surfaces, des géodésiques, de la courbure géodésique, de la courbure totale; le théorème de Meusnier et d'Euler sur la courbure en un point d'une surface.

Géométrie algébrique. — Je me suis toujours intéressé à la géométrie algébrique. C'est ainsi que, dans ma première année d'École Normale, j'avais osé me poser des questinns de la dilliculté desquelles je ne m'étais pas rendu cnmpte et qui

n'ont été résolues que tout récemment par les savants travaux de M. Severi. Il est inutile de dire que je n'ai obtenu aucun résultat, pourtant je me rappelle avoir prouvé que la classe minimum d'une courbe de degré n est bien celle que l'on pouvait prévoir, savoir le plus petit entier ν tel que $\nu(\nu - 1)$ égale n ou bien soit au moins égal à $n + 2$. S'il s'agit de courbes unicursales, cette plus petite classe est le plus petit entier au moins égal à $\frac{n}{2} + 1$.

Je me suis occupé à plusieurs reprises des polygones de Poncelet [**3**; **37**; **39**]. Sur ce sujet, j'ai écrit un mémoire de géométrie pure, assez étendu, dont l'impression aux *Annales de Toulouse* a été retardée de plusieurs années par les difficultés de la crise actuelle. Mon but principal a été d'attirer l'attention sur le beau travail dans lequel Cayley écrit, sous forme de déterminants, les conditions d'existence des polygones de Poncelet.

Ces résultats ne sont guère connus en France; peut-être à cause des quelques notations symboliques que Cayley emploie, mais sans doute surtout parce qu'il sort du domaine de la géométrie analytique, en utilisant le théorème d'Abel ou plutôt le théorème d'addition des fonctions elliptiques. Aussi ai-je tenu à arriver aux énoncés de Cayley en restant dans l'ordre des idées qui sont familières à tout ancien élève de Mathématiques spéciales. Il m'a paru d'autant plus intéressant de faire connaître ces énoncés qu'ils sont l'origine des déterminants à l'aide desquels on écrit la formule de multiplication des fonctions elliptiques. Tout cela est d'ailleurs la généralisation immédiate et naturelle de la remarque qui permit à Hermite d'obtenir la formule d'addition des fonctions elliptiques en exprimant que trois points d'une cubique sont en ligne droite. Dans les raisonnements de Cayley, la cubique qui intervient n'est liée à la question qu'au point de vue analytique; j'ai tenu à avoir une image géométrique nette, et voici l'une des formes auxquelles je suis parvenu : Supposons qu'il s'agisse d'étudier les polygones de Poncelet inscrits dans une conique C appartenant à un faisceau ponctuel F et circonscrits à des coniques C_1, C_2, ... de ce faisceau. Soit A un point situé sur C et sur l'un des côtés du triangle autopolaire commun à toutes les coniques de F. De A, menons les tangentes à ces coniques, le lieu des points de contact est une cubique Λ ; nous représentons chaque conique C_i par deux points A_i et B_i de Λ, savoir les points de contact des tangentes à C_i issus de A. Ceci étant, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des polygones de Poncelet est que les points A_1, A_2, ... forment, avec le point A pris un nombre convenable de fois, l'intersection complète de Λ et d'une courbe algébrique.

Pour arriver à ce résultat, j'ai utilisé la théorie de la résiduation de Sylvester;

on pourra opérer de même dans toutes les questions où les fonctions elliptiques ne sont utilisées que comme intermédiaires entre relations algébriques ; car la théorie de la résiduation permet l'étude des systèmes complets de points sur une cubique, donc l'étude des systémes d'équations algébriques dont les solutions peuvent être individuatisées par l'emploi des fonctions elliptiques.

On sait que la question des polygones de Poncelet a conservé quelque chose de mystérieux tant qu'on n'a pas mis en évidence le rôle des polygones repliés. La considération de ces polygones ne suffit pourtant pas pour le cas où l'on considére plus de deux coniques. Supposons que l'on ait un polygone $A_1 A_2 \ldots\ldots A_p$ inscrit dans C et dont les p côtés sont tangents à C_1, C_2, ... appartenant avec C à un même faisceau F, en des points M_1, M_2, ... on a :

$$\frac{A_1 M_1}{M_1 A_2} \times \frac{A_2 M_2}{M_2 A_3} \times \ldots\ldots \times \frac{A_p M_p}{M_p A_1} = \pm 1 .$$

Je dis que le polygone est circonscrit à C_1, C_2, ... ou leur est tangent suivant que, dans le second membre, on a $+1$ ou -1. Le théoréme de Poncelet est alors le suivant : s'il existe un polygone circonscrit, replié ou non, il en existe une infinité. D'autre part, quelles que soient C_1, C_2, ... il existe toujours un nombre fini de polygones tangents; dans le cas où C_1, C_2, ... sont identiques, ces polygones sont tous repliés.

Chasles a montré que si l'on considére les polygones de Poncelet à p côtés, circonscrits à une ellipse et inscrits dans des ellipses homofocales, ils ont tous même longueur. Cet énoncé n'est pas projectif; on le rend projectif en le généralisant : S'agit-il de polygones circonscrits à une conique C et inscrits dans des coniques appartenant à un faisceau tangentiel contenant C ? Il suffira de prendre pour absolue une conique de ce faisceau pour retrouver l'énoncé de Chasles. S'agit-il de polygones inscrits dans C et circonscrits à des coniques d'un faisceau ponctuel contenant C ? Il suffira de prendre pour absolue une conique du faisceau pour que tous les polygones aient même aire. Les deux énoncés peuvent être employés simultanément lorsqu'il n'y a que deux coniques; si, de ptus, la longueur (ou l'aire) est réelle, on pourra la considérer comme solution d'un problème de maximum ou de minimum ainsi que l'avait fait Chasles.

M. Montel m'avait posé la question suivante : Quel est le nombre maximum de diamètres rectilignes que peut posséder une courbe indécomposable de degré m ? J'ai montré [**18**] que ce nombre est m, si m est impair, et $m+2$, si m est pair; sauf quelques exceptions pour les petites valeurs de m. Pour obtenir ce résultat,

j'ai recherché quelles étaient toutes les dispositions possibles de diamètres des courbes algébriques, ce qui conduit à une application assez élégante de la théorie des groupes finis de rotations attachés aux polyèdres réguliers. Il y a dix dispositions de diamètres : cinq d'entre elles comportent une infinité de diamètres et ne conviennent qu'à des courbes décomposables en droites et en coniques; les cinq autres ne contiennent qu'un nombre fini de diamètres, nombre variable pour les deux premières dispositions qui correspondent aux groupes diédraux, nombres égaux respectivement à 10, 18, 30 pour les trois dernières, qui sont données par les groupes du cube et de l'icosaèdre. On forme facilement les équations des courbes admettant ces diamètres; on sait dire quelles sont les dispositions de diamètres possibles pour les courbes indécomposables d'un degré donné ou d'une classe donnée.

J'ai exposé [71] les curieux théorèmes de Miquel et de Clifford sur les systèmes de points et de cercles qu'on peut associer aux systèmes de droites d'un plan. Peut-être suis-je le premier à les avoir démontrés analytiquement et de façon très simple. A la suite de mon article, M. Giraud s'est aussi occupé du théorème de Miquel.

Travaux divers.

Vers 1907, les Professeurs de Mathématiques spéciales s'étaient mis à rechercher des raisonnements leur permettant de démontrer que les six conditions classiques sont suffisantes pour l'équilibre d'un solide, et cela sans faire appel à des axiomes tels que celui-ci : On peut appliquer à un corps deux forces égales et de sens contraires sans changer son état de mouvement ou de repos. Maurice Lévy avait imaginé l'un de ces raisonnements et l'avait même indiqué dans le programme d'admission à l'École centrale comme démonstration en quelque sorte officielle. J'étais alors Examinateur d'admission à cette École, chargé précisément de la mécanique. Les Professeurs se déclaraient enchantés de la démonstration de Maurice Lévy; j'eus le tort de leur montrer qu'elle ne serait suffisante que pour qui admettrait cette énormité : les forces intérieures restent les mêmes quand les forces extérieures varient. Ma critique arriva jusqu'aux oreilles d'un Directeur de Revue qui releva vertement l'erreur, sans dire, et d'ailleurs sans savoir, qui l'avait aperçue. Nous avons ensuite reconnu, lui et moi, qu'il n'y avait eu entre nous qu'un Professeur interposé.

Dans l'article où il reproduisait mon objection, l'Auteur déclarait péremptoires

des démonstrations qui ne l'étaient nullement. En voyant tant d'hommes éminents et avertis se tromper, j'ai cru utile de reprendre la question, sans ajouter rien à ce qui était connu auparavant, mais que tout le monde, semble-t-il, oubliait. J'ai alors [**67**, **78**] rappelé qu'il était illusoire d'espérer arriver à la démonstration que l'on cherchait; que pour affirmer qu'il y a équilibre, en s'appuyant uniquement sur les équations de la dynamique, il faut posséder des renseignements non seulement sur les forces qui sont appliquées au solide lorsque celui-ci occcupe la position étudiée, mais aussi sur celles qui agiraient sur lui s'il s'en écartait. J'ai précisé quels étaient les théorèmes qu'on pouvait démontrer et j'ai prouvé qu'ils suffisaient pour l'étude des machines simples. M. Mouthon faisait de son côté quelques observations analogues aux miennes.

Ces articles sur la mécanique avaient donc surtout un but pédagogique; c'est dans le même but que j'ai fait connaître des résultats peu connus et susceptibles de fournir des énoncés d'exercices [**69**, **70**, **71**]: que j'ai signalé de curieux lieux singuliers remplissant tout l'espace [**40**]; que j'ai formulé mon opinion sur les programmes d'Arithmétique et d'Algèbre [**79**], dans une note présentant cette originalité qu'on y voit un Professeur de Mathématiques demander une réduction des programmes de Mathématiques. J'ai publié une étude déjà assez complète des courbes épicycloïdales [**80**], courbes trop peu connues à mon avis : je vais plus loin qu'on ne le fait ordinairement dans l'étude du degré, de la classe, des singularités ponctuelles et tangentielles de celles de ces courbes qui sont algébriques. Deux autres articles d'ordre pédagogique sont ceux que j'ai consacrés aux angles polyèdres [**81**, **82**]; j'y insiste sur une propriété d'*analysis situs* très importante et trop peu remarquée : les points réels d'un plan projectif ou, ce qui revient au même, les droites de l'espace passant par un point fixe forment une variété unilatère.

Je pourrais encore indiquer, comme ayant un caractère pédagogique, les deux Notes suivantes, dans lesquelles je me proposais de mieux faire comprendre certains résultats. Il y a deux façons d'aborder l'étude des équations de Fredholm; ou bien on écrit la formule de résolution en se laissant guider par des analogies avec la théorie des équations linéaires et on en vérifie ensuite l'exactitude; ou bien, par un passage à la limite, on transforme les résultats obtenus dans le cas des équations linéaires. Au lieu de ne parler que vaguement des relations entre les deux questions, on précise les liens qui les unissent. M. Goursat avait indiqué une méthode de passage à la limite; je me suis intéressé à cette méthode que j'ai quelque peu simplifiée tout en étendant le champ de son application [**14**].

M. Volterra, grâce à la notion de fonctions permutables qu'il a introduite, a formé et a résolu toute une classe d'équations fonctionnelles, par analogie avec les

procédés de formation et de résolution des équations algébriques. J'ai pensé qu'ici encore on devait pouvoir établir un lien étroit entre les deux ordres de questions; en effet [**16**], les équations fonctionnelles et leurs solutions sont les transformées, par une opération bien déterminée, des équations algébriques et de leurs solutions. Ceci donne de nouvelles démonstrations de certains résultats et permet même de les préciser.

Cette remarque est analogue à la suivante que j'ai faite dans mon enseignement à l'École Normale : on n'attribue généralement à la notation des invariants, due à Clebsch et Aronhold, qu'une valeur symbolique; or, on peut la considérer comme une notation algébrique ordinaire des invariants. Il suffit de remarquer que toute forme f peut être représentée par $P_1 P_2 \ldots\ldots P_m + Q_1 Q_2 \ldots\ldots Q_m + \ldots\ldots$, les formes ainsi mises en évidence étant toutes linéaires, et qu'un invariant de f est un invariant des formes linéaires P_1, Q_1, ... Si même on s'appuie sur le théorème de Waring, on peut suivre pas à pas, en constatant qu'elles ont une signification algébrique précise, les diverses opérations de la théorie ordinaire, lesquelles, d'habitude, n'ont qu'une valeur symbolique.

L'enseignement à l'École Normale conduit souvent à donner des indications, telles que celle qui précède, que l'on n'a pas le temps de développer soi-même. C'est ainsi que j'avais expliqué comment l'on pourrait abandonner la méthode classique d'exposition de la théorie des séries entières, basée sur le théorème d'Abel, et partir du théorème de Cauchy-Hadamard. Dans un article récent, M. Flamant a très habilement mis en œuvre mes suggestions.

J'ai dit mon opinion sur des questions d'enseignement et sur des problèmes mathématiques dans diverses analyses [**23**, **24**, **25**, **27**] comme aussi dans ma leçon inaugurale au Collège de France [**84**]. Dans cette leçon, consacrée surtout à l'historique de la chaire de Mathématiques, j'ai fait une étude de l'Œuvre de Georges Humbert, et, parlant des travaux de Camille Jordan, j'ai essayé de montrer que la place qu'y occupaient les raisonnements synthétiques m'autorisait à me prétendre le disciple de cet illustre Savant.

TABLE DES MATIÈRES

TOULOUSE. — Impr. et Libr. ÉDOUARD PRIVAT — 4565